Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Wassilij Kopylov, M.Sc.
Jan Totz, M.Sc.

# 12. Übungsblatt – Quantenmechanik II

**Abgabe: Di. 12. 2. 2013 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

**Aufgabe 27 (20 Punkte):** *Mott Streuquerschnitt (davon 7 Bonuspunkte)*
Diese Aufgabe dient dazu sich mit Rechentechniken aus der Quantenelektrodynamik vertraut zu machen. Dazu untersuchen sie als einfaches Beispiel die Streuung eines relativistischen Dirac Elektrons an einem fixen Coulomb-Potential.

(a) Starten Sie mit dem entsprechendem S-Matrixelement, welches gegeben ist durch:

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \overline{\psi}_f(x) \not{A}(x) \Psi_i(x) \qquad (f \neq i). \tag{1}$$

Hierbei ist $x$ der relativistische Vierervektor, $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$, die sog. Feynman-Dagger-Notation und es gilt $\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. In niedrigster Ordnung Störungstheorie lässt sich die einfallende und gestreute Wellenfunktion als ebene Welle über Spinornotation darstellen als:

$$\Psi_i(x) \to \psi_i(x) = \sqrt{\frac{m_0}{E_i V}} u(p_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x} \tag{2}$$

$$\overline{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m_0}{E_f V}} \overline{u}(p_f, s_f) e^{ip_f \cdot x} \tag{3}$$

mit Normierungsvolumen $V$, Ruhemasse $m_0$, Elektronenenergien $E_i, E_f$, Impulsen $p_i, p_f$ und Spins $s_i, s_f$. Die Dirac-Spinoren $u(p, s)$ sollen noch nicht explizit verwendet werden. Das Coulomb-potential wird von einer statischen Punktquelle mit Ladung $q = Ze$ generiert:

$$A_0(\boldsymbol{x}) = -\frac{Ze}{|\boldsymbol{x}|} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A} = 0. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeit pro Teilchen $dW$ schreiben lässt als:

$$dW \stackrel{!}{=} |S_{fi}|^2 dN \tag{5}$$

$$= \frac{Z^2 (4\pi\alpha)^2 m_0^2}{E_i V^2} \frac{|\overline{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} (2\pi\delta(E_f - E_i))^2. \tag{6}$$

Hierbei ist $\alpha = e^2/\hbar c$ die Feinstrukturkonstante, wobei hier verwendet wird $\hbar = c = 1$. Der Vektor $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ gibt den Impulsübertrag bei der Streuung an und $\gamma^0$ ist eine der bereits bekannten Dirac-Matrizen.

(b) Zeigen Sie, dass das Quadrat der Delta-Distribution nicht divergiert, sondern geschrieben werden kann, als:

$$(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 = 2\pi\delta(0) 2\pi\delta(E_f - E_i) \tag{7}$$

$$= 2\pi T \delta(E_f - E_i). \tag{8}$$

Gehen Sie dafür davon aus, dass der Übergang statt in einem unendlichen in einem endlichen Zeitintervall $-T/2 \leq t \leq T/2$ stattfindet. Um die Äquivalenz der Approximation im Limes zu bestätigen, beweisen Sie folgendes Integral mithilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE_f \, 4\frac{\sin^2[(E_f - E_i)T/2]}{(E_f - E_i)^2} = 2\pi T. \tag{9}$$

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass die $j$-te Komponente der Stromdichte der einfallenden relativistischen Teilchen gegeben ist durch:

$$J^j_{\text{ein}} = c\bar{\psi}_i(x)\gamma^j\psi_i(x) \stackrel{!}{=} \frac{p_i c^2}{E_i V} = \frac{|v_i|}{V}. \tag{10}$$

Verwenden Sie dafür die Dirac-Spinoren:

$$u(p_i, s_i) = \sqrt{\frac{E_i + m_0c^2}{2m_0c^2}} \begin{pmatrix} \chi_{s_i} \\ \frac{cp_i\sigma_z}{E_i + m_0c^2}\chi_{s_i} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(d) (Bonus) Machen Sie die Annahme, dass alle Polarisationen gleich wahrscheinlich sind. Anstatt die Summe über Polarisationen explizit zu berechnen, zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{s_i, s_f} |\overline{u}_f\gamma^0 u_i|^2 = Tr\left[\gamma^0 \frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma^0\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right]. \tag{12}$$

Bei der weiteren Vereinfachung zeigen und verwenden Sie, dass gilt:

(i) Die Spur einer ungeraden Anzahl von $\gamma$-Matrizen verschwindet.

(ii) $Tr\left[(\gamma^0)^2\right] = 4$

(iii) $Tr(\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f) = 4E_iE_f + 4\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_f$

Benutzen Sie außerdem $\sum_{s_i} u_\beta(p_i, s_i)\bar{u}_\delta(p_i, s_i) = \left(\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\beta\,\delta}$, wobei $u_\beta(p_i, s_i)$ die $\beta$-te Komponente des Spinors $u(p_i, s_i)$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass für den Streuwinkel $\theta\measuredangle(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_f)$ gilt: $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_f = \beta^2E^2\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$, wobei $\beta = v/c$ mit $c = 1$ ist und außerdem: $\boldsymbol{q} = 2|\boldsymbol{p}|\sin\frac{\theta}{2}$ mit $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}_i| = |\boldsymbol{p}_f|$.

(f) Verwenden Sie nun die vorherigen Ergebnisse, um den Mott'schen Streuquerschnitt zu berechnen. Der differenzielle Querschnitt ergibt sich aus $d\sigma = dW/(T \cdot J_{\text{ein}})$. Integrieren Sie über das Intervall aus finalen Impulsen $p_f$, dessen Existenz sich auf die Unschärfe-Relation zurückführen lässt, um so die Singularität durch die Delta-Distribution zu beheben. Setzen Sie nicht zu früh $E_i = E_f$ voraus. Interpretieren Sie das Ergebnis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^2|\boldsymbol{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{13}$$

und betrachten Sie den klassischen Grenzfall. Plotten Sie beide Fälle.