Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 9. Januar 2013
http://www.tu-berlin.de/?124064

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

10. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Di. 15.01.2013 im Tutorium (10:15-11:45 H 0112)

M Aufgabe 28: *Virialkoeffizienten eines Gases harter Kugeln*

Der zweite und dritte Virialkoeffizient, $B_2(T)$ und $B_3(T)$ sind definiert als

$$\begin{aligned} B_2(T) &= -\frac{1}{2V}\int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{r}_{21}) \\ B_3(T) &= -\frac{1}{3V}\int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 f(\mathbf{r}_{21}) f(\mathbf{r}_{31}) f(\mathbf{r}_{32}) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ und $f(\mathbf{r}) = (e^{-\beta V(\mathbf{r})} - 1)$.
Betrachten Sie ein Gas harter Kugeln im Volumen V mit

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & |\mathbf{r}| < R \\ 0, & |\mathbf{r}| > R \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie $B_2(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. Geben Sie die Zustandsgleichung an.

(b) Berechnen Sie $B_3(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{21})$. Das Integral über $\mathbf{Q}$ kann man geometrisch auswerten. Geben Sie die Zustandsgleichung an.

S Aufgabe 29 (10 Punkte): *Zweiter Virialkoeffizient eines idealen Fermi Gases*
Die quantenmechanische großkanonische Zustandssumme eines Fermigases mit Eigenmodenenergien ϵ_k lautet

$$\mathcal{Z}_G = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}). \tag{1}$$

Für freie Teilchen mit Masse m gilt $\epsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/(2m)$. Das Gas befinde sich in einem Behälter mit Volumen V.

(a) Zeigen Sie, dass im Kontinuumlimit ($\sum_k \to \frac{2V}{(2\pi)^2}\int d^3k$), Eq. (1) zu

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{N}{V} = C\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}\lambda e^{-\beta\epsilon}}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}} \\ pV &= Ck_BTV\int_0^\infty d\epsilon\, \epsilon^{1/2}\ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}) \end{aligned}$$

führt, wobei $\lambda = e^{\beta\mu}$ und $C = (2m/\hbar^2)^{3/2}/(2\pi^2)$ für Fermionen.

(b) Leiten Sie unter der Annahme eines kleinen λ folgende Ausdrücke her.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\Lambda^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\lambda^n}{n^{3/2}} \\ \frac{p}{k_BT} &= \frac{1}{\Lambda^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\lambda^n}{n^{5/2}} \end{aligned} \tag{2}$$

und bestimmen Sie Λ.

(c) Bringen Sie Eq. (2) in die Form $\lambda = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots$ (bis zur zweiten Ordnung).

(d) Berechnen Sie damit den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ und interpretieren Sie dessen Vorzeichen.