

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

### 13. Übungsblatt – Statistische Physik

**Abgabe/Vorrechnen: Di. 05.02.2013 im Tutorium (10:15-11:45 H 0112)**

**M Aufgabe 35:** Landauentwicklung einer binären Mischung I

Eine Legierung (z.B. Messing) bestehe aus  $N_A$  Atomen des Typs  $A$  und  $N_B$  Atomen des Typs  $B$ , stellt also eine sog. binäre Mischung dar. Die Atome sind in einem kubischen primitiven Gitter angeordnet und wechselwirken nur mit ihren 6 nächsten Nachbarn. Die Wechselwirkungsenergie hat den Wert  $-J$  (anziehend) zwischen gleichen Atomen ( $A-A$  und  $B-B$ ) und den Wert  $+J$  (abstoßend) zwischen verschiedenen Atomen ( $A-B$ ). Es gilt  $J > 0$ .

- (a) In welcher Konfiguration ist die Energie minimal?
- (b) Berechnen Sie die Gesamtwechselwirkungsenergie  $U$  unter der Annahme, dass die Atome zufällig auf  $N$  Plätzen verteilt sind.

**S Aufgabe 36 (4 Punkte):** Landauentwicklung einer binären Mischung II

- (a) Berechnen Sie die Mischungsentropie  $S$  unter der Annahme  $N_A, N_B \gg 1$ . Verwenden Sie die Stirlingformel  $\ln N! \approx N \ln N - N$ .
- (b) Berechnen Sie die Freie Energiedichte  $f = F/N$  als Funktion des Ordnungsparameters  $\phi \equiv (N_A - N_B)/N$ . Entwickeln Sie  $f(\phi)$  bis zur vierten Ordnung in  $\phi$ :

$$f(\phi) \approx a_0(T) + \frac{a_2(T)}{2} \phi^2 + \frac{a_4(T)}{4} \phi^4.$$

Solch eine Entwicklung nennt man Landauentwicklung. Zeigen Sie, dass  $f(\phi)$  unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  nicht mehr überall konvex ist und skizzieren Sie  $f(\phi)$  für  $T > T_c$ ,  $T = T_c$ ,  $T < T_c$  und  $T = 0$ . Berechnen Sie den kritischen Exponenten  $\beta$ .

Rechnen Sie im folgenden mit der genäherten Freien Energiedichte weiter.

- (c) Bestimmen Sie die sogenannte Spinodale  $\phi_{sp}(T)$ . Diese begrenzt den Bereich  $\phi < |\phi_{sp}(T)|$ , in dem  $f(\phi)$  für  $T < T_c$  nicht konvex ist. Dieser Bereich ist charakterisiert durch eine Phasenseparation in von  $A$  bzw.  $B$  Atomen dominierte Bereiche mit  $\phi = \pm \phi_{eq}(T)$ , wobei  $\pm \phi_{eq}(T)$  die Funktion  $f(\phi)$  minimiert. Bestimmen Sie  $\phi_{eq}(T)$ . Zeichnen Sie  $\pm \phi_{eq}(T)$  und  $\pm \phi_{sp}(T)$  in ein  $(T, \phi)$  Diagramm ein.

**S Aufgabe 37 (6 Punkte):** Ginzburg-Landau Theorie

Für allgemeine inhomogene Systeme im Nichtgleichgewicht, d.h. solche mit orts- und zeitabhängigem Ordnungsparameter  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , wird die Freie Energie zu einem Funktional verallgemeinert:

$$F[\phi(\mathbf{r}, t)] = \int d^3\mathbf{r} \left\{ f(\phi) + \frac{\gamma}{2} (\nabla\phi)^2 \right\}.$$

mit der Landauentwicklung  $f(\phi)$  aus Aufgabe 36. Der Term  $\frac{\gamma}{2} (\nabla\phi)^2$  mit  $\gamma > 0$  berücksichtigt Inhomogenitäten von  $\phi$ .

- (a) Die Variation von  $F$  beschreibt nun die Energieänderung, wenn Atome (oder i.A. Teilchen) die Position ändern. Wir fassen diese Änderung daher als chemisches Potential auf mit

13. Übung SP WS12

$\mu = \frac{\delta F}{\delta \phi}$ . Zeigen Sie, dass man zusammen mit dem 1. Fick'schen Gesetz  $\mathbf{j} = -D\nabla\mu$  und der Kontinuitätsgleichung zur sog. Cahn-Hilliard Gleichung gelangt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\nabla^2 [a_2\phi + a_4\phi^3 - \gamma\nabla^2\phi] .$$

*Hinweis:* Die Variationsableitung ist definiert über  $\int \frac{\delta F}{\delta \phi} \delta \phi d^3\mathbf{r} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F[\phi + \epsilon\delta\phi]$ . Verwenden Sie außerdem die partielle Integration im Volumen:  $\int_V \nabla w \cdot \mathbf{v} d^3\mathbf{r} = \int_{\partial V} w \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \int_V w \nabla \cdot \mathbf{v} d^3\mathbf{r}$ .

- (b) Linearisieren Sie die Cahn-Hilliard Gleichung für den Fall niedriger Temperaturen (d.h. Phasenseparation) und machen Sie die Gleichung dimensionslos mit  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t}$  und  $\nabla^n \rightarrow \frac{1}{\lambda^n} \nabla_{\tilde{x}}^n$ . Die resultierende Gleichung sollte lauten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla_{\tilde{x}}^2 [3\phi + \nabla_{\tilde{x}}^2 \phi] .$$

Geben Sie  $\tau$  und  $\lambda$  an.

- (c) Geben Sie die Fourier-transformierte ( $\tilde{x} \rightarrow k$ ) der linearisierten Cahn-Hilliard Gleichung an. Störungen welcher Wellenlänge (im  $k$ -Raum) werden gedämpft, welche verstärkt? Für welche Wellenlänge ist die Verstärkung maximal?