Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Di. 04.12.2012 im Tutorium (10:15-11:45 H 0112)

S Aufgabe 18 (10 Punkte): *Linearisierte hydrodynamische Gleichungen (2+3+2+3 Punkte)*

Betrachten Sie die hydrodynamischen Gleichungen mit Dissipation

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) \tag{4.51}$$

$$mn\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = -\nabla(nk_BT) + \eta\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{4.52}$$

$$\frac{d}{dt}T = \frac{2\kappa}{3nk_B}\nabla^2 T - \frac{2}{3}T\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{2}{3nk_B}\underline{\underline{T}}' : \nabla\otimes\boldsymbol{u}\,. \tag{4.53}$$

mit Teilchenzahldichte n, Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}$, Masse m, Viskosität η, Wärmeleitfähigkeit κ, Temperatur T und Spannungsdeviator $\underline{\underline{T}}'$.

(a) Setzen Sie nun $n = \bar{n} + \delta n$, $T = \bar{T} + \delta T$ und $\boldsymbol{u} = 0 + \boldsymbol{u}$, mit den Gleichgewichtswerten $\bar{n}$ und $\bar{T}$, und linearisieren Sie die hydrodynamischen Gleichungen in δn, δT and $\boldsymbol{u}$.

(b) Für ebene Wellen mit $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ sind die Eigenmoden des Systems die Lösungen der Matrixgleichung

$$\omega \begin{pmatrix} \delta n \\ u_\alpha \\ \delta T \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \delta n \\ u_\beta \\ \delta T \end{pmatrix} . \tag{$*$}$$

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{M}(\boldsymbol{k})$. Hinweis: u_α sind die drei Komponenten von $\boldsymbol{u}$, d.h. $\mathbf{M}(\boldsymbol{k})$ ist eine 5×5 Matrix.

(c) In der "Hydrodynamik nullter Ordung" wird die Dispersion vernachlässigt: $\eta = \kappa = 0$. Das heißt das Gleichungssystem $(4.51) - (4.53)$ wird vereinfacht zu dem System $(4.42) - (4.44)$. Berechnen Sie für diesen Fall die fünf Lösungen von $(*)$. Geben Sie außerdem die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren an und diskutieren Sie diese.

(d) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen bis zur zweiten Ordnung im Wellenvektor k^2 für finites η und κ ("Hydrodynamik erster Ordnung"). Diskutieren Sie die Ergebnisse.

M Aufgabe 19: *Energie Fluktuationen im kanonischen Ensemble*

(a) Zeigen Sie, dass im kanonischen Ensemble $\ln\mathcal{Z}(\beta)$ die erzeugende Funktion der Kumulanten der inneren Energie U ist:

$$\langle U^n\rangle_c = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\ln\mathcal{Z}(\beta)\,. \tag{5.19}$$

(b) Leiten Sie den Zusammenhang

$$\langle U^2\rangle_c = k_BT^2C_v\,, \tag{5.22}$$

zwischen der zweiten Kumulante und der spezifischen Wärme $C_v = \frac{\partial\langle U\rangle}{\partial T}\Big|_{V,N}$ her.