Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Andrea Vüllings M.Sc., Dipl.-Phys. Ken Lichtner
Emely Wiegand B.Sc., Christian Frässdorf B.Sc.

10. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 14.01.2013 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 27 (6 Punkte): *Gruppen*

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}; \;\; \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \,\in\, \mathbb{R}; \;\; \det M = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

eine Gruppe unter Matrixmultiplikation bilden.

(b) Jede dieser Matrizen definiert eine Möbiustransformation T der erweiterten Zahlengeraden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$T\left(M\right): \;\; x \mapsto x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen unter Komposition eine Darstellung der Matrizengruppe bilden:

$$T\left(M_1\right) \circ T\left(M_2\right) = T\left(M_1 M_2\right).$$

(c) Wir schreiben einen Vierervektor $x = \left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right)$ nun als Matrix

$$g\left(x\right) = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}.$$

Ist diese Transformation eindeutig? D.h. kann man aus einer gegebenen Matrix wieder den Vierervektor extrahieren?
Zeigen Sie, dass die Minkowskimetrik von x gegeben ist durch $\det g\left(x\right)$.

(d) Sei M eine der Matrizen aus (a). Wir transformieren den Vierervektor x in Matrixdarstellung durch

$$g\left(x\right) \mapsto M g\left(x\right) M^T.$$

Welche Bedingung muss M erfüllen, damit die Minkowskimetrik erhalten ist und damit M die Darstellung einer Lorenztransformation ist.

Aufgabe 28 (7 Punkte): *Winkeltransformation in der speziellen Relativitätstheorie*

Es seien Σ und Σ' zwei mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ relativ zueinander bewegte Inertialsysteme. Beantworten Sie die beiden folgenden Fragen mit Hilfe der allgemeinen Lorentztransformation (d.h. ohne Ausnutzung der speziellen Kontraktions- und Dilatationsformeln):

(a) Ein in Σ ruhender Stab schließt mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ ein. Welchen Winkel schließt er mit der x'-Achse in Σ' ein?

(b) Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = v\mathbf{e}_y + 2v\mathbf{e}_x$. Welchen Winkel bildet seine Bahn mit der x-Achse in Σ und Σ'?

Aufgabe 29 (7 Punkte): *Wellengleichung*

Die Wellengleichung ist eine partialle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\partial_{xx} f\left(x,\, t\right) - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} f\left(x,\, t\right) = 0,$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

welche die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreibt. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\partial_{xx} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\partial_{tt} := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sind die zweiten partiellen Ableitungen nach Ort und Zeit.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Funktion $\phi(\cdot)$ die Funktion $f(x,\, t) := \phi(x \pm ct)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Wie verhalten sich diese Lösungen anschaulich?

Bei einer Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,\, t)\,,\quad \tilde{t} = \tilde{t}(x,\, t)\,,\quad \tilde{f}\left(\tilde{x},\, \tilde{t}\right) = f(x,\, t)$$

transformieren sich Ableitungen gemäß

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}}, \qquad \frac{\partial \bullet}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}},$$

wobei $\bullet$ ein Platzhalter für eine beliebige Funktion ist.

(b) Transformieren Sie die Wellengleichung mit der Galilei-Transformation

$$\tilde{x} = x + vt, \qquad \tilde{t} = t$$

(benutzen Sie die Notation $\partial_{xt} = \partial_{tx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$).
Ist die Wellengleichung invariant unter Galilei-Transformation (d.h. hat sie in den $\sim$ -Koordinaten dieselbe Form)?

(c) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung invariant unter der Lorentz-Transformation ist, d.h.

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt)\,, \text{ und } \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \text{ mit } \gamma := \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Vorlesung:	Mittwoch 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 203 Freitag 08:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 203
Klausur:	Mittwoch, 8. Februar 2013, von 08:00 – 10:00 Uhr im EW 203
Tutorien:	Mo 10–12 Uhr in ER 164 bei Christian Di 10–12 Uhr in EB 417 bei Emely Di 12–14 Uhr in EW 731 bei Emely Mi 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Mi 10–12 Uhr in EW 182 bei Christian Do 08–10 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Do 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken
Sprechzeiten:	Mo 15–16 Uhr in EW 060 bei Emely Mi 15–16 Uhr in EW 632 bei Andrea Do 15–16 Uhr in EW 627 bei Arash Fr 11–12 Uhr in EW 266 bei Ken
Scheinkriterien:	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bestandene Klausur