Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

3. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 11. 11. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 7 (4+2+1=7 Punkte): *Punktladungen*

Gleichnamige Ladungen stoßen sich im Allgemeinen ab. Ist aber der Abstand zwischen einer Punktladung und einer unendlich ausgedehnten Metallplatte mit gleichnamiger homogener Flächenladung hinreichend klein, so verschwindet diese Abstoßung.
Wir betrachten eine Punktladung $+q$ im Abstand r gegenüber einer unendlich ausgedehnten metallischen Platte.

(a) Betrachten Sie zunächst einmal den Fall einer geerdeten leitenden Metallplatte mit $\sigma = 0$. Die Punktladung influenziert eine Ladungsdichte σ_i auf der Metallplatte. Berechnen Sie diese Ladungsdichte $\sigma_i(\mathbf{r})$ aus dem elektrischen Feld an der Leiteroberfläche, welches Sie aus der Vorlesung kennen. Geben Sie außerdem die influenzierte Gesamtladung q_i an.

Nun betrachten wir wieder den Fall einer homogen geladenen Metallplatte mit der Flächenladung $+\sigma$.

(b) Berechnen Sie die Kraft zwischen Punktladung $+q$ und Metallplatte als Funktion des Abstandes r.

(c) Bei welchem Abstand r befindet sich die Position des Gleichgewichts, bei der die Gesamtkraft verschwindet?

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Wasserstoffatom*

In einem Experiment wurde das elektrostatische Potential eines Waserstoffatoms zu

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}\Big(1+\frac{1}{2}\alpha r\Big) \tag{1}$$

bestimmt. Berechnen Sie daraus die Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ und interpretieren Sie die auftretenden Beiträge. Zeigen Sie dazu zuerst, dass zwei beliebige nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängige Funktionen $f(r)$ und $g(r)$ die Relation

$$\Delta[f(r)\,g(r)] = f(r)\,\Delta g(r) + 2[\partial_r f(r)][\partial_r g(r)] + g(r)\,\Delta f(r) \tag{2}$$

erfüllen. Hier ist Δ wieder der Laplace-Operator. Beachten Sie auch, dass $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ gilt.

Aufgabe 9 (2+3+3+1=9 Punkte): *Poisson-Gleichung*

In dieser Aufgabe soll die Gleichung

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \tag{3}$$

hergeleitet werden. Dabei ist $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ der Laplace-Operator, $\mathbf{r}$ der Ortsvektor mit dem Betrag r und $\delta(\mathbf{r})$ ist die Dirac'sche Deltafunktion.
Betrachten Sie dazu die Poisson-Gleichung mit „Massenterm"

$$(-\Delta + m^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad m > 0. \tag{4}$$

Ziel ist es, diese Differentialgleichung zu lösen, d.h $G(\mathbf{r})$ zu bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Transformieren Sie die Differentialgleichung (4) in den Fourier-Raum, d.h. stellen Sie ausgehend von Gl. (4) eine Gleichung für $\tilde{G}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r \exp[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]\, G(\mathbf{r})$ auf. Bestimmen Sie aus dieser algebraischen Gleichung die Fourier-Transformierte $\tilde{G}(\mathbf{k})$.

(b) Zeigen Sie, dass man durch eine Fourier-Rücktransformation in den Ortsraum $G(\mathbf{r}) = -i\frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \frac{k \exp[ikr]}{k^2+m^2}$ erhält. *Hinweis:* Sie können im Integranden $\mathbf{r}$ in z-Richtung legen.

(c) Berechnen Sie das Integral aus (b) mithilfe des Residuensatzes.

(d) Zeigen Sie schließlich mit diesem Ergebnis, die Gültigkeit der Gl. (3).