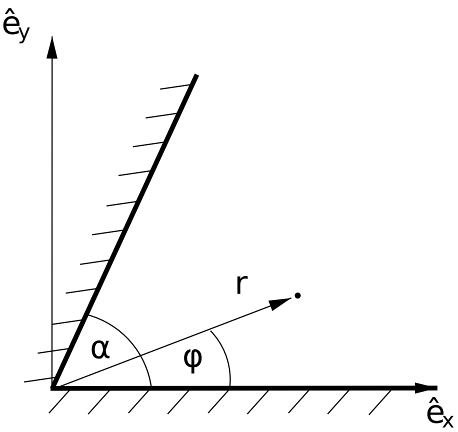
Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

4. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 18. 11. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 10 (6+1+2=9 Punkte): *Randwertproblem*



(a) Bestimmen Sie das Potential der obigen Abbildung, wobei die leitendenden Ebenen den Winkel φ einschließen und das Potential $V = 0$ besitzen. Benutzen Sie zweidimensionale Polarkoordinaten und den Separationsansatz

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)\Psi(\varphi). \tag{1}$$

Gehen Sie dabei analog zum in der Übung vorgestellten Problem vor. Geben Sie die allgemeine Lösung für Φ an und berücksichtigen Sie die Randbedingungen.

Hinweis: Substituieren Sie $r = e^{\nu}$, um die Differentialgleichung für $R(r)$ in eine bekannte Form zu bringen.

(b) Nähern Sie Ihre Lösung für kleine r. Überlegen Sie hierzu, welche Terme der Entwicklung verschwinden.

(c) Betrachten Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ für die beiden Grenzfälle $\alpha = \pi$ und $\alpha = 2\pi$.

Aufgabe 11 (2+1+1+1=5 Punkte): *Geladene Tropfen*

Betrachten Sie einen homogen geladenen, kugelförmigen Wassertropfen mit dem Radius r und der Ladung q.

(a) Berechnen Sie die elektrische Feldenergie E_c des Wassertropfens.

(b) Ein weiterer wichtiger Beitrag zur Energie kommt durch die Oberflächenspannung des Wassers. Er lässt sich durch

$$E_\gamma = 2\gamma 4\pi r^2 \tag{2}$$

beschreiben. Dabei ist $\gamma = 73\,\mathrm{mN/m}$ die Oberflächenspannung des Wassers. Berechnen und skizzieren Sie die Gesamtenergie als Funktion von r.

(c) Nun verschmelzen zwei gleiche Tropfen zu einem großen Tropfen. Vergleichen Sie die Gesamtenergien der zwei einzelnen Tropfen und des großen Tropfens. Können Sie sagen, welche Konfiguration energetisch vorteilhafter ist?

(d) Nehmen Sie an, dass ein Tropfen die Ladung $q = 2\,\mathrm{pC}$ trägt. Bestimmen Sie den optimalen Radius, indem Sie die Gesamtenergie $E_g = E_c + E_\gamma$ minimieren.

Aufgabe 12 (1+2+2+1=6 Punkte): *Quadrupolmoment*

In dieser Aufgabe soll das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung näher untersucht werden. Der kartesische Quadrupoltensor ist durch

$$Q_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (3x_i\, x_j - \delta_{i,j} r^2)\varrho(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^3 r \tag{3}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass Q_{ij} symmetrisch (d.h. $Q_{ij} = Q_{ji}$) und spurlos (d.h. $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$) ist.

Die Ladungsverteilung in einem Atomkern soll durch ein homogen geladenen Rotationsellipsoiden (mit den Halbachsen a und c) angenähert werden.

(b) Benutzen Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung und Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass in diesem Fall der Quadrupoltensor allein durch das Element $Q_{33} \equiv Q$ (*dem* Quadrupolmoment) bestimmt ist.

(c) Berechnen Sie Q! Drücken Sie Q dabei durch die Gesamtladung q des Kerns aus.
Hinweis: Punkte (x, y, z) innerhalb des Volumens eines Rotationsellipsoiden erfüllen die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$; ähnlich wie bei einer *Kugel*.

(d) Das Quadrupolmoment des stabilen Europium-Isotops ^{153}Eu wurde experimentell zu $Q/e = 2.5\cdot 10^{-28}\mathrm{m}^2$ bestimmt (e ist die Elementarladung). Wenn man annimmt, dass die Ladungsverteilung und das Kernvolumen deckungsgleich sind und der mittlere Radius des Kerns $R = \frac{a+c}{2} = 7 \cdot 10^{-15}\mathrm{m}$ beträgt, wie lautet die relative Abweichung $\frac{c-a}{R}$ der Halbachsen?