Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

1. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Fr. 24.10.2014 in der Vorlesung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Clausius-Mossotti-Relation und Molekularfeld Näherung*

Das makroskopische Gaußsche Gesetz

$$\nabla \mathbf{D} = \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

bezieht sich lediglich auf freie Ladungen durch die Flussdichte $\mathbf{D} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$. Bei leicht polarisierbaren isotropen Dielektrika ist die Flussdichte proportional zur elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{2}$$

mit der effektiven Permittivität des Dielektrikums ε. Es besteht eine direkte Relation zwischen ε und die mikroskopische Eigenschaften des Dielektrikums wie die Moleküldichte n und die Polarisierbarkeit der isolierten Molekülen α. Leiten Sie diese Relation indem Sie die Polarisation $\mathbf{P}$ mikroskopisch in der Molekularfeld Näherung herleiten. Identifizieren Sie die vernachlässigten Terme.
(Der Ausdrück

$$\mathbf{E}_{dip}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla_i \otimes \nabla_j \frac{\mathbf{p}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \tag{3}$$

liefert die elektrische Feldstärke, die einen Dipol $\mathbf{p}_j$ an der Stelle $\mathbf{x}_j$ verursacht. Zudem ist der Dipol proportional zur lokalen elektrischen Feldstärke $\mathbf{p}_j = \alpha \mathbf{E}_{tot}(\mathbf{x}_j)$.)

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Gaußsche Integrale*

Wir betrachten das Integral

$$Z[\{q_i\}] \equiv \int D[\Phi]\, e^{-H + \sum_j q_j \Phi_j}, \qquad D[\Phi] \equiv d\Phi_1 \dots d\Phi_N, \qquad H \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \Phi_i A_{ij} \Phi_j \tag{4}$$

mit positiv-definiter symmetrischer $N \times N$-Matrix A, wobei über alle Werte $-\infty < \Phi_i < \infty$ integriert wird. Dazu wird die Korrelationsfunktion G_{ij} als den Erwartungswert

$$G_{ij} \equiv \langle \Phi_i \Phi_j \rangle \equiv \frac{\int D[\Phi]\, \Phi_i \Phi_j e^{-H}}{\int D[\Phi]\, e^{-H}} \tag{5}$$

definiert.

1. Beweisen Sie
$$\frac{Z[\{q_i\}]}{Z[0]} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left(A^{-1}\right)_{ij} q_j}. \tag{6}$$

2. Zeigen Sie, dass die Korrelationsmatrix G gleich A^{-1} ist.

3. Berechnen Sie $Z[0] \equiv \int D[\Phi]\, e^{-H}$.

Vorlesung:

- Donnerstags 10–12 Uhr im EW 203
- Freitags 10–12 Uhr im EW 203

Übungen:

- Mi 10–12 Uhr im EW 733

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte
- Projekt über Renormierungsgruppe
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Übungen

Hinweise:

Die Übungsblätter werden in der Regel am Donnerstag in der Vorlesung ausgegeben. Die Abgabe erfolgt dann 8 Tage später Freitag in der Vorlesung.

Weitere Informationen können auf der Vorlesungshomepage des Instituts für Theoretische Physik gefunden werden.