

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

2. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Fr. 31.10.2014 in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Ising-Model mit unendlich weitreichiger Wechselwirkung

Wir betrachten Spins $\sigma_i = \pm 1$ auf N Gitterplätzen mit der Energie $H = -\frac{\gamma}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j$, $\gamma > 0$.

1. Zeige, dass sich die kanonische Zustandssumme als

$$(1) \quad Z_N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} e^{\beta \frac{\gamma}{N} (N-2n)^2}$$

schreiben läßt, wobei n die Anzahl der Spins nach unten (mit $\sigma_i = -1$) bezeichnet.

2. Zeige nun die Integraldarstellung

$$(2) \quad Z_N = \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-N\Phi(y)}, \quad \Phi(y) \equiv y^2 - \ln \left(2 \cosh \left(2\gamma \sqrt{\beta} y \right) \right).$$

3. Benutze eine Approximation für $N \rightarrow \infty$, um das Integral für Z_N auszuwerten. Zeige, dass daraus eine Selbstkonsistenzgleichung entsteht, deren Lösung einen Phasenübergang beschreibt. Berechne die kritische Temperatur. Skizziere die Funktion $\Phi(y)$ für verschiedene Temperaturen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Rayleigh-Ritz-Verfahren

Sei H der Hamiltonian eines Systems im thermischen Gleichgewicht mit freier Energie F zur Temperatur T . Für Variationszustände (Dichtematrizen) ρ gilt dann

$$(3) \quad F \leq \langle H - TS \rangle \equiv \text{Tr}[\rho(H + T \ln \rho)].$$

Beweise diese Ungleichung in zwei Schritten:

1. Seien ρ und ρ' zwei Zustände (Dichtematrizen) eines Systems. Beweise die Ungleichung

$$(4) \quad \text{Tr}(\rho \log \rho) \geq \text{Tr}(\rho \log \rho').$$

Hinweis: Benutze die Spektralzerlegung der Dichtematrizen.

2. Benutze (4), um Gl. (3) zu zeigen.

2. Übung Stat WS 2014-2015

- Vorlesung:**
- Donnerstags 10–12 Uhr im EW 203
 - Freitags 10–12 Uhr im EW 203

- Übungen:**
- Mi 10–12 Uhr im EW 733

- Scheinkriterien:**
- Mindestens 50% der Übungspunkte
 - Projekt über Renormierungsgruppe
 - Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Übungen

Hinweise:

Die Übungsblätter werden in der Regel am Donnerstag in der Vorlesung ausgegeben. Die Abgabe erfolgt dann 8 Tage später Freitag in der Vorlesung.

Weitere Informationen können auf der Vorlesungshomepage des Instituts für Theoretische Physik gefunden werden.