

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

5. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Fr. 21.11.2014 in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (5 Punkte): Ginzburg-Landau-Theorie

Der Ginzburg-Landau-Modell der Supraleiter beschreibt ein komplexes Ordnungsparameter-Feld $\psi(\mathbf{x})$ und ein elektromagnetisches Vektor-Potenzial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ mit Hamiltonian

$$(1) \quad \beta H = \alpha |\psi|^2 + u/2 |\psi|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2.$$

1. Zeigen Sie, dass es eine Sattelpunkt-Lösung gibt mit der Form $\psi(\mathbf{x}) = \bar{\psi}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$. Finden Sie $\bar{\psi}$ für $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert der Fourier-Raum-Fluktuationen $\langle |\phi(\mathbf{q})|^2 \rangle$, $\langle |\theta(\mathbf{q})|^2 \rangle$ und $\langle |\mathbf{a}(\mathbf{q})|^2 \rangle$, wo

$$(2) \quad \psi(\mathbf{x}) = (\bar{\psi} + \phi(\mathbf{x})) e^{i\theta(\mathbf{x})} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

Aufgabe 10 (5 Punkte): Trikritischer Punkt

Der Hamiltonian

$$(3) \quad \beta H = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{t}{2} m^2 + um^4 + vm^6 \right],$$

mit $u = 0$ und $v > 0$, beschreibt ein Trikritischer Punkt.

1. Berechnen Sie die Singularität der Wärmekapazität bei $t \rightarrow 0$ mit einer Sattelpunktnäherung.
2. Schließen Sie longitudinale und transversale Fluktuationen ein

$$(4) \quad \mathbf{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_l(\mathbf{x})) \mathbf{e}_l + \sum_{\alpha=2}^n \phi_t^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\alpha$$

und schreiben Sie βH zu quadratischer Ordnung in ϕ .

3. Berechnen Sie die longitudinale und transversale Korrelationsfunktionen.
4. Berechnen Sie die erste Korrektur zur freien Energie des Sattelpunkts und die Wärmekapazität.
5. Gewinnen Sie ein Ginzburg-Kriterium für trikritische Punkte und für allgemeine $m^2 n$ Theorien.