

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

6. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Mi. 17.12.2014

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (5 Punkte): *Blockspins*

Lass uns eine Blockspin-Transformation explizit in einem einfachen Beispiel aufführen: der eindimensionalen Ising-Kette ohne lokales Feld

$$(1) \quad H = -K \sum_i s_i s_{i+1}.$$

Gruppieren Sie die Spins in dreier Blocken und ordnen sie jedem Block den Wert des mittleren Spins zu.

1. Begründen Sie die gewählte Zuordnung bei niedrigen Temperaturen: warum weicht diese vom Spinmittelwert wenig ab?
2. Beweisen Sie die Transformation

$$(2) \quad e^{\pm x} = \cosh x (1 \pm \tanh x),$$

und benutzen Sie das für die Umschreibung der Zustandssumme.

3. Summieren Sie über die Spins auf dem Rand jedes Blocks für die Herleitung des reduzierten Hamiltonians H' .
4. Welche Skalentransformation entspricht dieser Renormierung?
5. Beschreiben Sie die Fixpunkte dieser Renormierungsgruppe und begründen Sie dadurch die Inexistenz eines Phasenübergangs.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Quantum-klassische Zuordnung*

Wie bei der eindimensionalen quanten Ising-Kette, man darf der null-dimensionale quanten Fall zu einer höher-dimensionalen klassischen Ising-Kette zuordnen. Null-dimensionales quanten Ising-Modell wird vom Hamiltonian

$$(3) \quad H = -h \sum_i \sigma_x^i - J \sum_i \sigma_z^i$$

beschrieben.

1. Zerlegen Sie den Boltzmann-Operator in kleinen inverse-Temperatur-Schritten.
2. Führen Sie eine Einheitsentwicklung des Hilbert-Raums zwischen jeden Schritt ein.
3. Drücken Sie die Zustandssumme des quanten Systems als eine klassische Zustandssumme aus und identifizieren Sie das klassische Modell der zu diesem Fall zuzuordnen ist.
4. Diskutieren Sie die Thermodynamik dieses Modells.