Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

8. Übungsblatt – Statistische Mechanik

Abgabe: Mi. 21.01.2015 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Jordan-Wigner-Transformation*

Das 1-D Quantum-Ising-Modell

$$H = -g \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x - J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \tag{1}$$

kann analytisch mittels der Jordan-Wigner-Transformation gelöst werden

$$\sigma_n^x = 1 - 2c_n^\dagger c_n \tag{2}$$

$$\sigma_n^z = -\left(c_n^\dagger + c_n\right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 - 2c_m^\dagger c_m\right), \tag{3}$$

wobei c_n fermionische Operatoren sind, die die Antivertauschungsrelationen erfüllen

$$\left\{c_m, c_n^\dagger\right\} = \delta_{nm}, \qquad \{c_m, c_n\} = 0 \tag{4}$$

1. Prüfen Sie, dass die Spin Vertauschungsrelationen durch die Transformation behalten sind.
2. Schreiben Sie den Jordan-Wigner-transformierten Hamilton-Operator (bis auf dem Rand-Term $-J\sigma_N^z \sigma_{N+1}^z$) um. (Hint: $c_n^2 = 0$)
3. Für periodische Randbedingungen $\sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z$, benutzen Sie die Projektoren

   $$\mathcal{P}^{\pm} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \prod_{m=1}^{N} \left(1 - 2c_m^\dagger c_m\right)\right] \tag{5}$$

   um den Hamilton-Operator in Terme unterschiedlicher Parität zu zerlegen. (Hint: Beachten Sie die unterschiedlichen Randbedingungen in jedem Term)
4. Füren Sie eine Fourier-Transformation ein

   $$c_n = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{c}_k e^{+ikn\frac{2\pi}{N}} \tag{6}$$

   um die eindimensionale Geometrie in paarweise Kopplungen umzuwandeln. Dafür müssen geeignete k-Werte je nach Parität benutzt werden.

Es bleibt nur noch eine Bogolubov-Transformation übrig um das Modell zu diagonalisieren.