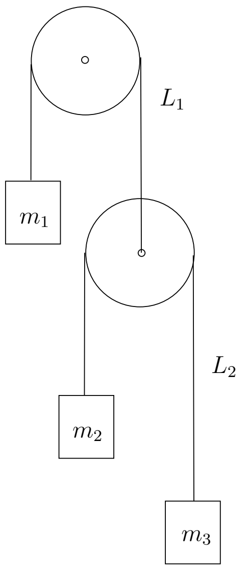
Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

3. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 6. November 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1+2+5=8 Punkte): *Doppelte Atwood-Fallmaschinen*

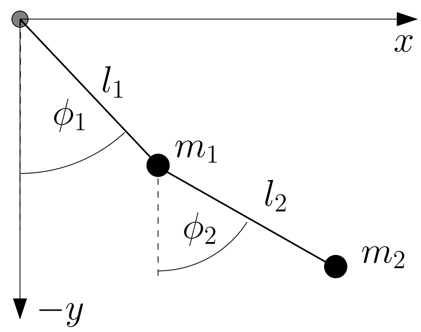


Die doppelte Atwood'sche Fallmaschine besteht aus zwei aneinander gehängten Fallmaschinen mit festen Seilenlängen L_1 und L_2

1. Stellen Sie die potentielle und die kinetische Energie des Systems in kartesischen Koordinaten auf.
2. Führen Sie verallgemeinerte Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten auf. (Vernachlässigen Sie den Radius der Rollen.)
3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen im Lagrange-II-Formalismus her und entkoppeln Sie diese mittels Matrix-Inversion. Welche Art von Bewegung ist zu erwarten?

Aufgabe 2 (2+3+1+4=10 Punkte): *Doppelpendel*

Das mathematische Doppelpendel besteht aus zwei Massen m_1 und m_2, die durch zwei masselose Stäbe untereinander und mit dem Aufhängepunkt verbunden sind. Es wirke die Gravitationskraft in Richtung $-\vec{e}_y$.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems bezüglich der verallgemeinerten Koordinaten ϕ_1 und ϕ_2 auf.
2. Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.
3. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Näherung kleiner Winkel ($\phi_{1,2} \ll 1$) gegeben sind durch:

$$0 = \ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l_1}\phi_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot{\phi}_2, \tag{1}$$

$$0 = \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l_2}\phi_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot{\phi}_1, \tag{2}$$

4. Bestimmen Sie die Frequenzen der Normalschwingungen in der Näherung kleiner Winkel für den Fall $l_1 = l_2 = l$.

Aufgabe 3 (2 Punkte): *Vereinfachte Euler-Lagrange-Gleichung*
Für den Fall von einer zeitunabhängigen Lagrange-Funktion L in einer Koordinate q ($L \equiv L(q, \dot{q})$) wird die Euler-Lagrange-Gleichung äquivalent zur Form

$$L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C, \tag{3}$$

wobei C eine Konstante ist. **Hinweis:** Beweisen Sie Gl.(3), indem Sie den Ausdruck

$$\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\dot{q} \tag{4}$$

als eine totale Ableitung nach t schreiben.

Aufgabe 4 (2+1+1+3=7 Punkte): *Kettenlinie*
Eine uniforme Kette der Länge L und der Masse M hängt von zwei Endpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in einem uniformen Schwerefeld $\mathbf{g} = -g\mathbf{e_y}$. Die Kettenlinie soll als Lösung eines Variationsproblems hergeleitet werden.

1. Drücken Sie die potentielle Energie $V[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx L(y(x), y'(x))$ als Funktional der Kettenlinie $y(x)$ aus. **Hinweis:** Drücken Sie zuerst $y(s)$ als Funktion der Bogenlänge s aus. Die Bogenlänge wird für eine beliebige Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ als $ds = \left|\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{t})}{dt}\right| dt$ definiert.

2. Das Problem enthält die Zwangsbedingung, dass die Länge der Kette L sei. Die Koordinate y erfült diese nicht automatisch. Daher muss ein Lagrange-Multiplikator eingeführt werden. Zeigen Sie dass, das Funktional, dessen Variationsableitung das Problem löst, gegeben ist durch:

$$J[y(x)] = \lambda M g + \frac{M}{L} g \int_{x_1}^{x_2} \left[y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2}\right] dx \tag{5}$$

3. Finden Sie die vereinfachte Euler-Lagrange-Gleichung aus Aufgabe 3, welche die potentielle Energie V der Kettenlinie unter der Nebenbedingung minimiert.

4. Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung.