Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

4. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 13. November 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (5+6=11 Punkte): *Variation in mehreren Dimensionen: hängende Membran*
Wir betrachten eine elastische Membran, die in einer Berandung R in der x-y-Ebene eingespannt sei. Kleine Auslenkungen der Membran aus dieser Ebene werden durch eine Funktion $z(x, y, t)$ beschrieben und bewirken eine zusätzliche Spannung der Membran, die zu einer Flächenstreckung führen. Die Arbeit, die dabei verrichtet wird, ist proportional zur Flächenänderung. Dies führt zur Gleichung

$$V[z,t] = \int_G \left\{ \frac{1}{2}\tau^2 \left[\left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \right] + g\rho z(x,y,t) \right\} dx\, dy$$

für die potentielle Energie der Membran im Schwerefeld. G sei dabei das von R berandete Gebiet in der Ebene, τ die Spannung der Membran in der Ruhelage und ρ die Flächendichte der Membran.
Die kinetische Energie der Membran ist gegeben durch

$$T[z,t] = \int_G \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial z(x,y,t)}{\partial t} \right)^2 dx\, dy.$$

1. Das Wirkungsfunktional, das für die Membran resultiert, hat die Form

   $$S[z] := \int_{t_0}^{t_1} \left(T[z,t] - V[z,t] \right) dt.$$

   Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für die Membran von der Form

   $$\Delta z(x,y,t) - \frac{\rho}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = \frac{g\rho}{\tau^2}$$

   ist. Benutzen Sie dazu die in der VL hergeleiteten Euler-Lagrange-Gl. für mehrere Dimensionen.

2. Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den statischen Fall im kreisförmigen Gebiet $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wählen Sie die Integerationskonstanten so, dass z stetig ist, und die Randbedingung erfüllt.
   Hinweis: *Der Laplace-Operator ist in Polarkoordinaten für eine Funktion die nicht von ϕ abhängt gegeben durch*

   $$\Delta z(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial z(r)}{\partial r} \right).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens*
In der Elektrodynamik lassen sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ durch das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ausdrücken:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \qquad\qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen mit Ladung e im EM-Feld ist dann gegeben durch

$$L(\mathbf{r},\, \dot{\mathbf{r}},\, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\,\phi(\mathbf{r},\, t) + e\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},\, t)$$

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Newtonschen Gleichungen mit Lorentz-Kraft ergeben:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = e\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}).$$

Hinweise: *Berechnen Sie die* ***totale*** *Zeitableitung* $\frac{d}{dt}\mathbf{A}\,(\mathbf{r}(t), t)$. *Benutzen Sie außerdem den* ε*-Tensor, oder berechnen Sie zunächst* $\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Noether-Theorem: helikoide Symmetrie*
Gegeben sei ein Teilchen der Masse m mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, das sich unter dem Einfluss des Potentials $V(r, \phi, z)$ (r, ϕ und z sind Zylinderkoordinaten) auf der Oberfläche eines unendlich ausgedehnten Kreiszylinders mit dem Radius R und der Symmetrieachse $\mathbf{e}_z$ bewegen möge. Das Potenzial $V(r, \phi, z)$ besitze die helikoide Symmetrie einer Schraubenlinie mit der Ganghöhe b:

$$V(r, \phi, z) = V(r, \phi + \alpha, z + \frac{b}{2\pi}\alpha) \qquad \text{für} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die Erhaltungsgröße, die sich aus der helikoiden Symmetrie des Potentials $V(r, \phi, z)$ ergibt.