Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

6. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 27. November 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (2 Punkte): *Euler Winkel*
Mithilfe der Euler Winkel (ϕ, θ, ψ) lässt sich die relative Orientierung eines körperfesten Koordinatensystems K' bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems K als eine Abfolge von drei Drehungen beschreiben: $K^{(i+1)} = MK^{(i)}$, wobei $K = K^{(0)}$ und $K' = K^{(3)}$. Veranschaulichen Sie die Zwischenschritte der Drehungen, indem Sie jeweils die Drehmatrix M angeben, die die Koordinatensysteme $K^{(i)}$ ineinander überführt.
Ausgehend vom kartesischen Koordinatensystemen K mit Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ $\mathbf{e}_z$ erfolgen sukzessive die folgenden Drehungen:

(i) Man erhält das Koordinatensystem $K^{(1)}$, indem um den Winkel ϕ um die z-Achse von K gedreht wird. Geben Sie die Drehmatrix an.

(ii) Man erhält das Koordinatensystem $K^{(2)}$, indem um den Winkel θ um die x-Achse von $K^{(1)}$ gedreht wird. Geben Sie die Drehmatrix an.

(iii) Man erhält das körperfeste Koordinatensystem K', indem um den Winkel ψ um die z-Achse von $K^{(2)}$ gedreht wird. Geben Sie die Drehmatrix an.

(iv) Geben Sie nun die Matrix an, die K in K' überführt.

Hinweis: *Veranschaulichen Sie sich dies anhand einer Drehung des mitgeführten Dreibeins der Koordinatenachsen.*

Aufgabe 2 (2+3+2=7 Punkte): *Kräftefreier Kreisel*
Beachten Sie die Vorarbeit im Skript 3.3.3. Sie dürfen die dort angegebenen Formeln direkt verwenden. Verweisen Sie bei Benutzung auf die entsprechende Formel.

(i) Zeigen Sie für den kräftefreien symmetrischen Kreisel, dass man die folgende Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ erhält:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{\Theta_1'}$$

(ii) Zeigen Sie, dass auch für den Neigungswinkel $\theta = const$ folgen muss, sowie die Rotationsfrequenz um die Figurenachse $\dot{\psi} = const$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang zwischen der Rotationsfrequenz um die Figurenachse $\dot{\psi}$, dem Neigungswinkel θ und der Präzessionsfrequenz $\dot{\phi}$ besteht:

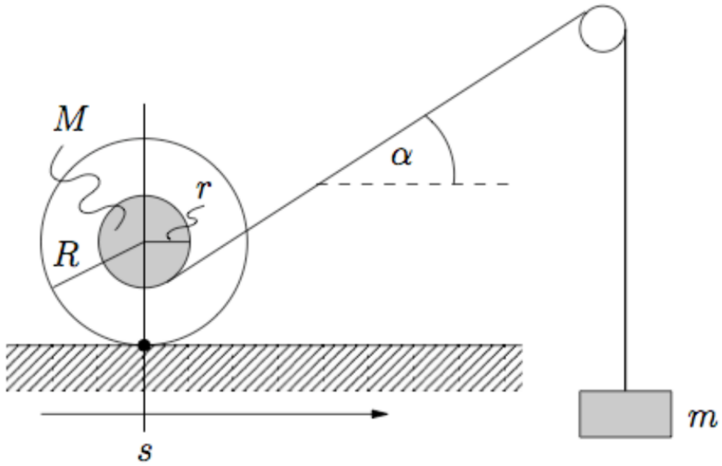
$$\dot{\phi} = \frac{\Theta_3'}{\Theta_1' - \Theta_3'} \frac{\dot{\psi}}{\cos(\theta)}$$

Aufgabe 3 (4+2+2=8 Punkte): *Folgsame und unfolgsame Garnrolle*
Eine Garnrolle bestehe zum einen aus zwei äußeren Scheiben mit Radius R und vernachlässigbarer Masse. Und zum anderen aus einem inneren Vollzylinder mit Radius r und Masse M, auf dem ein Faden aufgewickelt ist. Die äußeren Scheiben rollen auf einer Unterlage ohne zu gleiten. Ein Faden liegt am inneren Zylinder mit dem Winkel α an. Durch eine hängende Masse m wirke nun eine Kraft auf die Garnrolle, wobei der Winkel α dabei konstant bleibe.

(i) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Gesamtsystems als Funktion der Koordinate s (Position der Garnrolle) an.

(ii) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für s ab.

(iii) Die Rolle sei zu Beginn des Vorgangs in Ruhe $\dot{s}(0) = 0$. Für kleine Winkel würde die Rolle nach rechts loslaufen, für große dagegen nach links. Bestimmen Sie den Grenzwinkel α_c.



Aufgabe 4 (2+2+2=6 Punkte): *Hamilton-Funktion*
Ein Massenpunkt bewegt sich in der xy-Ebene unter dem Einfluss einer Zentralkraft, deren Betrag nur vom Abstand zum Koordinatenursprung abhängt.

(i) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Polarkoordinaten (r, ϕ) auf.

(ii) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse und erzeugen Sie daraus die Hamilton-Funktion:
$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha q_\alpha - L$$

(iii) Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.