Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Fr. 18. Dezember 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (6+7=13 Punkte): *Winkeltransformation in der speziellen Relativitatstheorie*
Es seien K und K' zwei mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ relativ zu einander bewegte Inertialsysteme. Beantworten Sie die beiden folgenden Fragen mit Hilfe der allgemeinen Lorentz-Transformationen (d.h. ohne Ausnutzung der speziellen Kontraktions- und Dilatationsformel):

1. Ein in K ruhender Stab schließt mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ ein. Welchen Winkel schließt er mit der x'-Achse in K' ein?

2. Ein Teilchen habe in K die Geschwindingkeit $\mathbf{u} = 2v\,\mathbf{e}_x + v\,\mathbf{e}_y$. Welchen Winkel bildet seine Bahn mit der x-Achse in K und K'?

Aufgabe 2 (2+6+7=15 Punkte): *Wellengleichung*
Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\partial_{xx} f(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} f(x,t) = 0$$

die die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreibt. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\partial_{xx} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\partial_{tt} := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sind die zweiten partiellen Ableitungen nach Ort und Zeit.

1. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $\phi(\cdot)$ die Funktion $f(x,t) := \phi(x \pm ct)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Wie verhalten sich diese Lösungen anschaulich?

Bei einer Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,t), \quad ,\tilde{t} = \tilde{t}(x,t), \quad ,\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{t})$$

transformieren sich Ableitungen gemäß

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial \bullet}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial \tilde{\bullet}}{\partial \tilde{t}}$$

wobei $\bullet$ ein Platzhalter für eine beliebige Funktion ist.

2. Transformieren Sie die Wellengleichung mit der Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + vt, \\ \tilde{t} &= t. \end{aligned}$$

   Benutzen Sie die Notation $\partial_{xt} = \partial_{tx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$. Ist die Wellengleichung invariant unter Galilei-Transformation (d.h. sie hat in $\sim$-Koordinaten dieselbe Form)?

3. Zeigen Sie, dass die Wellengleichung invariant unter Lorentz-Transformation ist

$$\tilde{x} = \gamma(x + vt) \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tilde{t} = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Relativistisch bewegter Stab*
Betrachten Sie folgendes zweidimensionales Problem: Ein Stab bewegt sich auf eine Öffnung zu, die sich in ihrem Ruhsystem in der x-Achse befindet und 9 Meter breit ist. Im Ruhsystem der Öffnung bewegt sich der Stab mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x - v_y \mathbf{e}_y$ auf das Loch zu und zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Schwerpunkt des Stabes mit dem Zentrum der Öffnung identisch. Während der Bewegung soll der Stab immer entlang der x-Achse ausgerichtet sein. Er besitzt in seinem Ruhsystem die Länge 18 Meter. Finden Sie durch die Rechung heraus, ob für $\sqrt{1 - v_x^2/c^2} = 1/3$ der Stab ohne Kollision durch das Loch hindurchgeht. Funktioniert der Durchgang aus Sicht des Stabes?
Hinweis: Die Lorentz-Transformation für zwei Bezugssysteme, die sich geradlinig gleichförmig mit einer beliebigen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ zueinander bewegen und deren Ursprünge zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2 - \gamma t \mathbf{v} \\ t' &= \gamma t - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2. \end{aligned}$$