Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 15. Dezember 2015

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Vitaly Belik, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Manuel Katzer, Anne-Kathleen Malchow, Jonas Rezacek

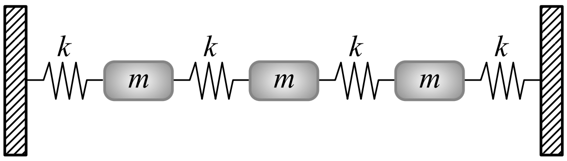
# 10. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Fr. 8. Januar 2016 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden* **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

**Aufgabe 1 (1+3+1=5 Bonus-Punkte):** *Normalmoden*

Gegeben seien drei mit Federn gekoppelte Oszillatoren in einer Dimension. Die äußeren sind jeweils noch an einer Wand befestigt. Alle drei besitzen die gleiche Masse $m$ und die vier Federn haben die gleiche Federkonstante $k$.




1. Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an und stellen Sie die Matrizen für $T$ und $V$ auf.

2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Normalmoden dieser Bewegung. *Hinweis: Zur Lösung der kubischen Gleichung klammern Sie geschickt einmal* $(2k - m\omega^2)$ *aus und lassen Sie nur positive Eigenfrequenzen als Lösung zu.*

3. Zeigen Sie anhand einer Skizze die verschiedenen Normalmoden.

**Aufgabe 2 (5+4+4+2=15 Bonus-Punkte):** *Kapitza-Pendel (Wiederholungsaufgabe)*
Man betrachte ein Pendel der Länge $l$, dessen obere Aufhängung nicht fest ist, sondern sich mit der Funktion $a(t) = d\sin(\Omega t)$ periodisch auf und ab bewegt. Zur Beschreibung des Systems benutzen wir Polarkoordinaten $r$ und $\phi$ und setzen den Ursprung auf $a(0)$, wobei $\phi = 0$ die negative senkrechte Halbachse ist.

1. Bestimmen Sie mit dem Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung. Verwenden sie hierzu $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Welche Besonderheit hat die Bewegungsgleichung im Vergleich mit der eines nicht-getriebenen Pendels?

2. Bestimmen Sie mit dem Hamilton-Formalismus die Bewegungsgleichungen.

3. Die Hamilton-Gleichungen und die Euler-Lagrange-Gleichung sind schwer zu Vergleichen. Das kann man aber mit einer kanonischen Transformation ändern. Finden Sie eine erzeugende Funktion, die mit der Definition der neuen Impuls-Koordinate $P = p - mdl\Omega\cos(\Omega t)\sin\phi$ übereinstimmt. Welche Form hat die neue Ortskoordinate im einfachsten Fall?

4. Zeigen Sie, dass die zeitliche Ableitung von einer der neuen Hamilton-Gleichungen direkt die Euler-Lagrange-Gleichung liefert.

**Aufgabe 3 (5 Bonus-Punkte):** *Kapitza-Pendel (Numerik)*

Integrieren Sie die Bewegungsgleichung aus Aufgabe 1 numerisch. Stellen Sie die Lösungen im Phasenraum graphisch dar. Untersuchen Sie außerdem, ab welcher Frequenz $\Omega$ das Pendel in der Nähe des invertierten Zustands ($\phi = \pi$) bleibt und geben Sie dafür eine phänomenologische Ungleichung an.