Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Judith Lehnert,
Dr. Marten Richter,
Dr. Torben Winzer

9. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 14. Januar 2016 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!*

Aufgabe 1 (3 Punkte): *Berechnung von Kommutatoren*

Zeigen Sie, dass

$$[\hat{c}_\alpha^\dagger, \hat{c}_\beta^\dagger\, \hat{c}_\gamma] = -\hat{c}_\beta^\dagger\, \delta_{\alpha,\gamma} \quad \text{und}$$
$$[\hat{c}_\alpha^\dagger\, \hat{c}_\beta, \hat{c}_\gamma^\dagger\, \hat{c}_\delta] = \hat{c}_\alpha^\dagger\, \hat{c}_\delta\, \delta_{\beta,\gamma} - \hat{c}_\gamma^\dagger\, \hat{c}_\beta\, \delta_{\alpha,\delta}$$

gilt, wobei die Operatoren $\hat{c}_\alpha$, $\hat{c}_\alpha^\dagger$ kanonischen Antikommutator-Relationen genügen. Was ändert sich an diesen Ausdrücken, wenn die Operatoren kanonischen *Kommutator*-Relationen unterliegen?

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Fermionen auf einem Gitter*

Wir betrachten ein System bestehend aus nicht-wechselwirkenden Fermionen auf einem eindimensionalem Gitter. Dieses hat M Gitterplätze und der $(M+1)$-te Gitterplatz wird wieder mit dem ersten Gitterplatz identifiziert (periodische Randbedingungen). Die Gitterkonstante wird mit a bezeichnet. Der Hamilton-Operator eines solchen Systems ist z.B. durch

$$\hat{H} = -t \sum_{j,\sigma} \left(\hat{c}_{x_j,\sigma}^\dagger\, \hat{c}_{x_{j+1},\sigma} + \hat{c}_{x_{j+1},\sigma}^\dagger\, \hat{c}_{x_j,\sigma} \right) - \mu \sum_{j,\sigma} \hat{c}_{x_j,\sigma}^\dagger\, \hat{c}_{x_j,\sigma} \tag{1}$$

gegeben. Hier erstrecken sich die Summen über die Spin-Konfigurationen $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ und über alle Gitterplätze $x_j = j\, a$, mit $j = 1, 2, \ldots, M$. Die Operatoren $\hat{c}_{x_j,\sigma}$, $\hat{c}_{x_j,\sigma}^\dagger$ vernichten, bzw. erzeugen ein Fermion mit der Spineinstellung σ am j-ten Gitterplatz. Damit genügen die $\hat{c}_{x_j,\sigma}$, $\hat{c}_{x_j,\sigma}^\dagger$ kanonischen Antikommutator-Relationen, $\{\hat{c}_{x_i,\sigma}, \hat{c}_{x_j,\sigma'}^\dagger\} = \delta_{i,j}\, \delta_{\sigma,\sigma'}, \{\hat{c}_{x_i,\sigma}, \hat{c}_{x_j,\sigma'}\} = 0$.

(a) Transformieren Sie die Operatoren $\hat{c}_{x_j,\sigma}$ in den Impulsraum. Dazu müssen Sie zunächst zeigen, dass die ebenen Wellen

$$u_{q_n}(x_j) = \sqrt{\frac{1}{M}} \mathrm{e}^{-iq_n\, x_j}$$

mit dem Gitterimpuls $q_n = \frac{2\pi}{a\, M}(-\frac{M}{2} + n)$ $(n = 1, 2, \ldots, M)$ auf dem Gitter sowohl orthonormal, als auch vollständig sind.

(b) Transformieren Sie schließlich den Hamilton-Operator (1) in den Impulsraum und zeigen Sie, dass dieser dann diagonal ist

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{M} \sum_{\sigma} (\varepsilon_{q_n} - \mu) \hat{c}_{q_n,\sigma}^\dagger\, \hat{c}_{q_n,\sigma}.$$

Wie lautet die Dispersionsrelation ε_{q_n}? Zeichnen Sie diese für Gitter mit $M = 3, 10$ und 100 Gitterplätzen.

Aufgabe 3 (3 Punkte): *Allgemeine Baker–Campbell–Hausdorff-Formel*

Zeigen Sie, dass für zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_n, \tag{2}$$

wobei der 'Multikommutator' rekursiv durch

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_0 = \hat{B} \quad \text{und} \quad \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_n = \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]_{n-1}\right] \tag{3}$$

definiert ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte): *Feldoperatoren*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Hamilton-Operator eines Vielteilchensystems in „zweiter Quantisierung“ die Form

$$\hat{H} = \sum_{\mu,\nu} \langle\mu|\,\hat{h}\,|\nu\rangle\; \hat{a}^\dagger_\mu\, \hat{a}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mu,\nu\\ \mu',\nu'}} \langle\mu,\nu|\,\hat{v}\,|\mu',\nu'\rangle\; \hat{a}^\dagger_\mu\, \hat{a}^\dagger_\nu\, \hat{a}_{\mu'}\, \hat{a}_{\nu'} \tag{4}$$

hat. Hier sind μ, ν, μ' und ν' beliebige Quantenzahlen, deren Einteilchen-Zustände $|\mu\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, $\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$ ist der Einteilchen-Hamilton-Operator, $\hat{v}$ ist ein Zweiteilchen-Operator und $\hat{a}^\dagger_\mu, \hat{a}_\mu$ sind Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen im Zustand $|\mu\rangle$.
Mit Hilfe einer unitären Transformation lassen sich die Erzeuger und Vernichter zu der Einteilchen-Basis $|\mu\rangle$ durch Erzeuger und Vernichter einer zweiten Einteilchen-Basis $|a\rangle$ darstellen. Sind Letztere die Eigenzustände des Einteilchen-Ortsoperators $\hat{\mathbf{x}}$, dann gilt

$$\hat{a}_\mu = \int \mathrm{d}^3x\, \varphi^*_\mu(\mathbf{x})\, \hat{\Psi}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

mit den sogenannten Feldoperatoren $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ und dem vollständigen Orthonormalsystem $\varphi_\nu(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}\,|\nu\rangle$.

(a) Invertieren Sie die Gleichung (5) und leiten Sie damit die Definiton der Feldoperatoren $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ aus dem Skript her.

(b) Benutzen Sie die Gleichung (5) für den Feldoperator $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ oder das Ergebnis aus Teilaufgabe (a), um den Hamilton-Operator im Ortsraum darzustellen. D.h., drücken Sie $\hat{H}$ durch die Feldoperatoren anstatt durch die Erzeuger und Vernichter $\hat{a}^\dagger_\mu, \hat{a}_\mu$ aus.

(c) Verwenden Sie nun die ebenen Wellen des Impulsoperators als die Einteilchen-Basis und zeigen Sie damit, dass die Fourier-Transformierte der Teilchendichte $\hat{n}(\mathbf{x}) = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})\,\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ die Darstellung $\hat{n}(\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^3q\, \hat{a}^\dagger_{\mathrm{q}}\, \hat{a}_{\mathrm{q+p}}$ hat.