Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Judith Lehnert,
Dr. Marten Richter,
Dr. Torben Winzer

11. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 28. Januar 2016 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!*

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Zweite Ordnung Born und Yukawa-Potential*

Wir betrachten die Streuung einer einfallenden ebenen Welle $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ an einem Potential $V(\mathbf{r})$. Die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung kann formal als

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \, \langle \mathbf{r} | \hat{G}_0^{\pm}(E) | \mathbf{r}' \rangle V(\mathbf{r}') \, \psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}') \tag{1}$$

geschrieben werden, mit der Green'schen Funktion in 3D: $\langle \mathbf{r} | \hat{G}_0^{\pm}(E) | \mathbf{r}' \rangle = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

(a) Lösen Sie diese Integralgleichung formal bis einschließlich zweiter Ordnung im Potential unter Verwendung der Born'schen Näherung. Gehen Sie davon aus, dass $r \gg r'$ ist und bringen Sie Ihr Ergebnis in die Form $\psi_{\mathbf{k}}^{+}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k}) \frac{e^{ikr}}{r}$ mit

$$\begin{aligned} f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k}) = &-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \\ &- \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_\mathbf{r}} \cdot V(\mathbf{r}') \cdot \int d\mathbf{r}'' \langle \mathbf{r}' | \hat{G}_0^{\pm}(E) | \mathbf{r}'' \rangle V(\mathbf{r}'') \cdot \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'') \\ &+ \mathcal{O}(V^3)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

mit $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e}_r$.

(b) Berechnen Sie für das Yukawa-Potential $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} \cdot e^{-r/R_0}$ die erste Ordnung von $f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k})$. Zeigen Sie, dass sich daraus für $R_0 \to \infty$ die Rutherfordsche Streuformel $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2\alpha^2}{4k^4\hbar^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ ergibt. *Hinweis:* Definieren Sie dazu $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e}_\mathbf{r}$ und erläutern Sie mithilfe einer Skizze die Gültigkeit von $q = 2k\sin(\theta/2)$, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$ ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte): *Streuung am Delta-Potential*

Berechnen Sie mit Hilfe der Lippmann–Schwinger-Gleichung in einer Raumdimension die Streuung einer ebenen Welle an dem singulären Potential $V(x) = g\,\delta(x)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Zeitabhängige Störungstheorie*

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω_0, welcher für Zeiten $t < 0$ in seinem Grundzustand ist. Für Zeiten $t \geq 0$ wird der Oszillator durch eine harmonische Kraft

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{3}$$

angetrieben. Die Stärke F_0 und die Frequenz ω sind dabei konstant. Behandeln Sie diesen Antrieb störungstheoretisch und berechnen Sie die Auslenkung $\langle \hat{x}(t) \rangle$ mit Hilfe der ersten Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Was passiert im Resonanzfall ($\omega \to \omega_0$) und für eine konstante Anregung ($\omega \to 0$)?

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Streuung an der harten Kugel (4+4=8 Punkte)*

Wir betrachten hier das Modell der harten Kugel,

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für}\, r \leq R_0 \\ 0 & \text{für}\, r > R_0. \end{cases}$$

Dabei ist R_0 der Radius der Kugel. Die zu bestimmende Wellenfunktion hat somit die Randbedingung

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv 0 \ \text{ für } \ r \leq R_0$$

zu erfüllen. Es empfiehlt sich der Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = N \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{i}^l (2l+1)[j_l(kr) + c_l h_l^+(kr)] P_l(\cos\vartheta),$$

wobei $j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z}$ die sphärische Bessel-Funktion, $n_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z}$ die sphärische Neumann-Funktion und $h_l^+(z) = j_l(z) + \mathrm{i} n_l(z)$ die Hankel-Funktion 1. Art ist. $P_l(z)$ ist ein Legendre Polynom und N die Normierungskonstante. k ist der Impuls der einfallende Welle und ϑ der Streuwinkel. Die c_l sind zu bestimmende Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an der harten Kugel gegeben ist durch

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \frac{j_l^2(kR_0)}{n_l^2(kR_0) + j_l^2(kR_0)}.$$

(b) Diskutieren Sie für σ die Grenzfälle (1) $kR_0 \ll 1$ und (2) $kR_0 \gg 1$. Beim Grenzfall (2) können Sie die Summe $\sum_l$ bei $l_0 \approx kR_0$ abbrechen. Warum? Das asymptotische Verhalten von $j_l(z)$ und $n_l(z)$ darf als bekannt angenommen werden.