Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

23. Januar 2017

11. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Dienstag, den 06.12.17 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Gravitomagnetismus***

Gegenwärtig befindet sich ein Experiment in einer Erdumlaufbahn, dass bestimmte Effekte des Gravitationsfeldes auf Gyroskope (Kreisel) bestimmen soll. Dieses Experiment trägt den schlichten Namen Gravity Probe B. Es treten dabei zwei verschiedene Effekte auf, die es theoretisch zu beschreiben gilt.

a) Betrachten Sie zunächst die Bewegung eines Gyroskops in einem gegebenen kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeld. Dem (Eigen-) Drehimpuls des Gyroskops sei der Vektor s^μ zugeordnet. Er folgt der Bewegungsgleichung

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu} s^\kappa u^\nu. \tag{1}$$

Das Gravitationsfeld sei beschrieben durch die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = (1 - \frac{2a}{r})dt^2 - (1 - \frac{2a}{r})^{-1} dr^2 - r^2(d\Theta^2 + sin^2\Theta d\phi^2) \tag{2}$$

Das Gyroskop befinde sich auf einer Kreisbahn mit $r = const$, $\Theta = \pi/2$ und $\phi = \omega_0\tau$ mit $u^0 = const$ und $\omega_0 = const$. Seine Vierergeschwindigkeit ist dann $(u^\mu) = (u^0, 0, 0, \omega_0)$.

i) Bestimmen Sie mittels (1) die Bewegungsgleichungen für s^μ im Gravitationsfeld (2) unter den benutzten Einschränkungen.

ii) Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen unter den Anfangsbedingungen $s^1(0) = 1$, $\dot{s}^1(0) = 0$, $s^2(0) = 0$ und $s^3(0) = 0$.
Hinweise: Beachten Sie, dass die Christoffelsymbole als konstant anzusehen sind. Die Integration von $s^2(\tau)$ ist trivial. Die Bewegungsgleichung für $s^1(\tau)$ kann integriert werden durch nochmaliges ableiten nach τ und Ausnutzung der Gleichung für $s^0(\tau)$. Man erhält $\frac{d^2s^1}{d\tau^2} = -k^2 s^1$ hier ist k^2 eine geschickt gewählte Konstante, die noch zu bestimmen ist. (Es ist nicht notwendig die Gleichung für s^0 zu integrieren).

iii) Bestimmen Sie k^2 explizit. Benutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für u^1- $\frac{du^1}{d\tau} = -\Gamma^1_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$.

iv) Betrachten Sie die Eigenzeitspanne $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ für einen Umlauf. Befindet sich $s^i(\tau_0)$ wieder am Punkt $s^i(0)$?

b) Neben dem statischen Gravitationsfeld haben die meisten Himmelskörper noch die Eigenschaft der Rotation. Diese wirkt sich auch auf das äußere Gravitationsfeld aus. Wir wollen diesem Effekt in einer Schwachfeldnäherung Rechnung tragen. Betrachten Sie dazu wiederum die Bewegung eines Kreisels gemäß (1). Für einen ruhenden Kreisel $(s^\mu) = (0, s^i)$, $(u^\mu) = (c, 0, 0, 0)$ mit $\tau = t$ ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\frac{ds^i}{dt} = -c\Gamma^i_{j0} s^j, \tag{3}$$

wobei die Christoffelsymbole in linearer Näherung aus den Potentialen

$$h_{0i} = \frac{2GI}{c^3} \frac{\epsilon_{ikn}\omega^k x^n}{r^3} \tag{4}$$

zu bilden sind. Hier sind G, c die üblichen Konstanten, I das (konstante) Trägheitsmoment ϵ_{ikn} der totalantisymmetrische Tensor und es gilt $v_i = \epsilon_{ikn}\omega^k x^n$. Dabei ist ω^i die konstante Winkelgeschwindigkeit.

Leiten Sie aus (3) die Bewegungsgleichung

$$\frac{ds_i}{dt} = \pm \frac{GI}{c^2} \left(\frac{3}{r^5} (r^j \omega_j)(\mathbf{s} \times \mathbf{r})_i - \frac{1}{r^3} (\mathbf{s} \times \omega)_i \right) \tag{5}$$

ab.

Hängt dieser Effekt von der Bahn um die rotierende Quelle ab?
Hinweis: Benutzen Sie die bac-cab Regel.