Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

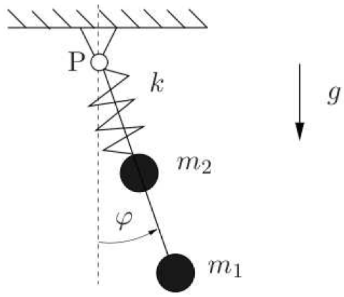
4. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Bis Mo. 21.11.2016 10:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 8 (6 Punkte): *Feder- und Fadenpendel*

Eine masselose starre Stange ist am Punkt P aufgehängt (siehe Skizze). Im Abstand l ist eine Masse m_1 angebracht. Außerdem gleitet die Masse m_2 reibungsfrei an der Stange, sie unterliegt nicht nur der Erdanziehungskraft sondern wird auch von einer masselosen Feder mit der Federkonstanten k und der Ruhelänge l_0 gehalten. Der Auslenkwinkel der Stange aus der Vertikalen sei $\varphi(t)$ und der Abstand der Masse m_2 vom Aufhängungspunkt sei $r(t)$.



(a) Indentifizieren Sie die verallgemeinerten Koordinaten, stellen Sie dann die Langrange-Funktion sowie die Lagrange-Gleichungen auf.

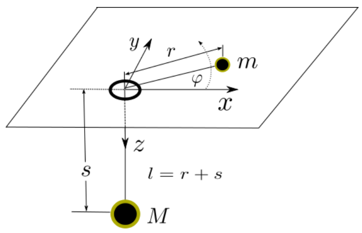
(b) Prüfen Sie die Plausibilität der in (a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen, indem Sie die Grenzfälle $\varphi(t) = \varphi_0$ und $r(t) = l$ betrachten.

(c) Lösen Sie die in (a) gefundenen vollständigen Bewegungsgleichungen numerisch mit einem Programm Ihrer Wahl (etwa die Funktion `NDSolve` in *Mathematica*). Nehmen Sie dazu sinnvolle Werte für die Konstanten m_1, m_2, l, l_0, k sowie die Anfangsbedingungen $r(0), \dot{r}(0)$ und $\varphi(0), \dot{\varphi}(0)$ an. Plotten Sie die Lösungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$.

(d) **Bonus:** Plotten Sie die Ergebnisse aus (c) als Phasenraumportrait $\dot{r}(t)$ gegen $r(t)$. Betrachten Sie auch die in (b) beschriebenen Spezialfälle. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 9 (5 Punkte): *Tischplatte mit Loch*

Zwei Massen m und M sind durch einen Faden der Länge l verbunden. Dieser ist durch ein Loch in einer Tischplatte gefädelt. Die Masse m befindet sich auf der Tischplatte und kann auf der Tischebene reibungsfrei rotieren. Die Masse M hängt im Abstand s zur Tischplatte und bewegt sich nur in z-Richtung.



(a) Identifizieren Sie die verallgemeinterten Koordinaten und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion L.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Enthalten die Bewegungsgleichungen eine zyklische Koordinate? Wenn ja, welche Erhaltungsgröße beschreibt diese?

Bitte Rückseite beachten!⟶

4. Übung WS16/17

Aufgabe 10 (2 Punkte): *Vereinfachte Euler-Lagrange-Gleichung*

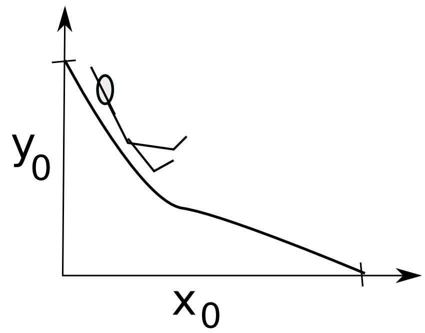
Für den Fall einer zeitunabhängigen Lagrangefunktion $L \equiv L(q, \dot{q})$ in einer Koordinate q kann die Euler-Lagrange-Gleichung als

$$L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C \tag{1}$$

geschrieben werden, wobei C eine Konstante ist. Beweisen Sie dies.

Aufgabe 11 (7 Punkte): *Brachystochronenproblem (1.5+2.5+2=6 Punkte)*

An Bord eines Flugzeuges ist nach der Landung ein Feuer ausgebrochen. Die Passagiere müssen über eine Notrutsche aussteigen, auf der sie reibungsfrei herabgleiten. Sie müssen dabei nicht nur den Höhenunterschied y_0 bewältigen, sondern sich aus Sicherheitsgründen auch noch den Abstand x_0 vom Flugzeug entfernen. Bestimmen Sie die optimale Form (Bahn) der Rutsche, damit die Passagiere das Flugzeug auf dem schnellsten Wege verlassen können.



(a) Zeigen Sie, dass das Funktional $T[y]$ durch

$$T[y(x)] = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}dx$$

gegeben ist. Folgern Sie dies aus der Energieerhaltung.

(b) Leiten Sie aus der Extremalbedingung $\frac{\delta T[y]}{\delta y(x)} = 0$ mit Hilfe der Formel in Aufgabe 10 eine Differentialgleichung für $y(x)$ her. Diese Differentialgleichung sollte äquivalent sein zu

$$2g(y_0 - y)(1 + y'^2) = C$$

wobei C eine Konstante sei. .

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung der obigen Differentialgleichung durch

$$x = x(s) = \frac{c^2}{4g}(s - \sin(s)) \qquad \text{und} \qquad y = y(s) = y_0 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos(s)),$$

wobei s ein Parameter sei, gegeben ist. Stellen Sie mit Hilfe der Randbedingungen eine Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante c auf.

(d) **Bonus:** Zeigen Sie, dass man von jedem Startpunkt auf der Rutsche die gleiche Zeit benötigt, um zum Minimum (charakterisiert durch $s = \pi$) zu gelangen.

Prof. Dr. Harald Engel
Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr, Ché Netzer, Philip Knospe

Vorlesung:
- Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
- Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.