Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

2. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 31.10.2016 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M **Aufgabe 5**: *Helmholtz Freie Energie und maximale Arbeit*

Zeigen Sie: Die Änderung der Helmholtz Freien Energie ΔF entspricht bei isothermen Prozessen, bei denen außerdem die Teilchenzahl konstant bleibt, der maximalen Arbeit ΔW, die ein System verrichten kann:

$$|\Delta W| \leq (-\Delta F) \,. \tag{2.16}$$

S **Aufgabe 6 (4 Punkte):** *Würfelspiele*

Man stelle sich zwei Würfel vor, die geworfen werden.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem der Würfel eine 2 oben liegt.

(b) Bestimmen Sie unter der Hypothese, dass die Augensumme 6 ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 2 oben liegt.

Man nehme nun an, dass einer von denen gezinkt ist ($p_1 = \ldots = p_5 = 1/10$ und $p_6 = 1/2$) und der andere ordungsgemäß funktioniert ($p_1 = \ldots = p_6 = 1/6$). Dabei bezeichnet p_i jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Wurf die Zahl i oben liegt.

(c) Sie greifen sich einen der Würfel und werfen ihn zweimal, wobei jeweils die 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dritten Wurf wieder die 6 oben liegt?

Hinweis: Der Satz von Bayes kann Ihnen bei Teil (c) behilflich sein.

M **Aufgabe 7**: *Charakteristische Funktion*

Die Fouriertransformierte einer Verteilung $P(x)$ (bzw. den Erwartungswert $\langle e^{-ikx} \rangle$) nennt man charakteristische Funktion:

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} P(x)\, dx \,. \tag{3.13}$$

Berechnen Sie $G(k)$ für

(a) die homogene Verteilung:

$$P_a(x) = \begin{cases} 1/2a, & -a < x < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \,, \tag{3.27}$$

(b) die Exponentialverteilung:

$$P_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \,, \tag{3.28}$$

(c) die Normalverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} \right\} \,. \tag{3.12}$$

(d) Mit Hilfe von $G(k)$ kann man die Momente berechnen:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n G(k)}{dk^n}\bigg|_{k=0} . \tag{3.14}$$

Berechnen Sie damit den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Varianz $(\Delta x)^2$ der Normalverteilung (3.12).

S **Aufgabe 8 (3 Punkte):** *Zentrale Momente der Normalverteilung*

Zeigen Sie, dass die zentralen Momente der Normalverteilung (3.12) gegeben sind durch

$$\langle (x - x_0)^n \rangle = \begin{cases} \sigma^n (n-1)!!, & \text{n gerade} \\ 0, & \text{n ungerade} \end{cases} .$$

Berechnen Sie damit die ersten vier Momente und Kumulanten. Wobei $n!!$ die Doppelfakultät $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ ist.

Hinweis: Kumulanten lassen sich ähnlich zu Gl. (3.14) berechnen:

$$\kappa_n = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{dk^n} \ln G(k)\bigg|_{k=0} ,$$

wobei κ_n die n-te Kumulante ist.

S **Aufgabe 9 (3 Punkte):** *Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Observablen*

Gegeben sei eine Verteilung $P(x)$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(f)$ einer Observablen $f(x)$ gegeben ist durch

$$P(f) = \langle \delta(f(x) - f) \rangle. \tag{3.8}$$