Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 14.11.2016 im Tutorium (12:15 - 13:45 EW 731)

M Aufgabe 15: *Boltzmanngleichung*

Betrachten Sie ein Gas nicht wechselwirkender Teilchen der Masse m, die elastisch an **raumfesten** Teilchen der Dichte n_0 streuen. Für den Fall, dass keine externen Kräfte angreifen, lässt sich der Stoßterm dann schreiben als

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{coll.}} = \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}_2| \left[f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_3(\Omega), t) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_4(\Omega), t) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_2, t) \right] \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right| \mathrm{d}^3 p_2 \mathrm{d}\Omega \,. \tag{4.24}$$

Zeigen Sie, dass für die Boltzmanngleichung dann gilt

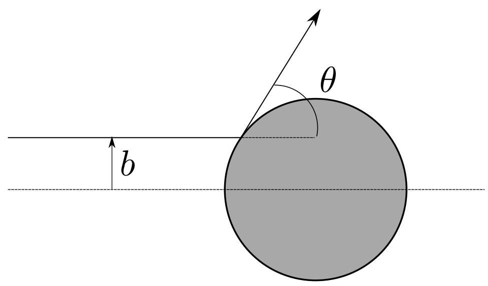
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \nabla_q + \mathbf{F} \cdot \nabla_p \right\} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{n_0 |\mathbf{p}|}{m} \int \left[f(\mathbf{q}, \mathbf{p_3}(\Omega), t) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right| \mathrm{d}\Omega \,, \quad (*)$$

wobei $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ die Dichte der Gasteilchen ist.

M Aufgabe 16: *Streuung*

Ein zweidimensionales Gas streue an harten Scheiben mit Radius a (siehe Skizze rechts). Zeigen Sie, dass bei Streuung unter dem Streuwinkel θ, der Stoßparameter b, der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma$ und der totale Streuquerschnitt σ_{tot} gegeben sind durch

$$b = a \cos\frac{\theta}{2}; \quad d\sigma = \frac{a}{2} \sin\frac{\theta}{2} d\theta; \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{tot}} = 2a.$$



Hinweis: für den Stoßparameter in zwei Dimensionen b gilt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

S Aufgabe 17 (10 Punkte): *Diffusionsgleichung (3+1+4+2 Punkte)*

Definieren Sie die Teilchendichte $n(\mathbf{q}, t) \equiv \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, \mathrm{d}^3 p$ und den dazugehörigen Teilchenstrom $\mathbf{j}(\mathbf{q}, t) \equiv \int \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, \mathrm{d}^3 p$.

(a) Zeigen Sie, dass damit aus $(*)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{q}, t) + \nabla_q \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}, t) = 0.$$

folgt.

Mit dem 1. Fick'schen Gesetz $\mathbf{j}(\mathbf{q}, t) = -D \cdot \nabla_q n(\mathbf{q}, t)$ führt dies zur Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{q}, t) = D \nabla_q^2 n(\mathbf{q}, t).$$

mit der Diffusionskonstanten D.

Hinweis: Nehmen Sie $\mathbf{F} = 0$ an. Die Teilchenzahlerhaltung erzwingt

$$\int \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} \mathrm{d}^3 p = 0$$

(b) Lösen Sie die stationäre Diffusionsgleichung in 1D für die Randbedingungen $n(0,t) = 2$ und $n(1,t) = 1$.

(c) Lösen Sie die Diffusionsgleichung in 1D für die Anfangsbedingung $n(q,0) = \delta(q)$ und die Randbedingungen $\lim\limits_{|q|\to\infty} n(q,t) = 0$. Was ergibt sich für $\langle x^2 \rangle$? Plotten Sie ferner $n(q,t)$ für $D \cdot t = 0.1, 1, 10, 100$.

(d) Leiten Sie die Dispersionsrelation der diffusiven Moden her

$$\omega = -iDk^2,$$

und interpretieren Sie das Resultat.

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche M und schriftliche S Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.