Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 25. Oktober 2016

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

1. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 08.11.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (14 Punkte): *Hamiltondichte des Klein-Gordon-Feldes*

In der Vorlesung ist die Lagrangedichte des Klein-Gordon-Feldes angegeben worden:

(1) $$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\left(\partial_\mu \psi^*(\mathbf{x},t)\right)\left(\partial^\mu \psi(\mathbf{x},t)\right) - \lambda_c^{-2}|\psi(\mathbf{x},t)|^2\right].$$

1. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung auf die Klein-Gordon-Gleichung führt:

   (2) $$\partial^\xi\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\xi\psi^*)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} = 0.$$

2. Schreiben Sie mit Hilfe der Lagrangedichte die Hamiltondichte auf:

   (3) $$\mathcal{H} = \Pi_\psi\partial_0\psi + \Pi_{\psi^*}\partial_0\psi^* - \mathcal{L},$$

   wobei $\Pi_\psi = \partial L/\partial(\partial_0\psi)$ den Feldimpulsoperator bezeichnet. Bitte beachten Sie die Position der Indizes und nutzen Sie ggf. die Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1,-1,-1,-1)$.

3. Berechnen Sie die Energiedichte für das freie Teilchen/Antiteilchen. Setzen Sie als Klein-Gordon-Feld folgendes an:

   (4) $$\psi(\mathbf{x},t)_\pm = A(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-E_\pm(\mathbf{p})t)},$$

   und $E_\pm^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Kontinuitätsgleichung und Klein-Gordon-Gleichung*
Das skalare Klein-Gordon-Feld ist die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung:

(5) $$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right)\psi(\mathbf{x},t) = 0.$$

Hier ist $\lambda_c = \hbar/(m_0c)$ die Compton-Wellenlänge und $\partial^\mu = (\partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$ die Vierer-Schreibweise des Ableitungsvektors. Zeigen Sie ausgehend von der Klein-Gordon-Gleichung, dass das Klein-Gordon-Feld einer Kontinuitätsgleichung der Form:

(6) $$\dot\rho(\mathbf{x},t) + \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = 0$$

genügt.

1. Geben sie explizit die Dichte $\rho(\mathbf{x},t)$ und den Strom $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ an.

2. Berechnen Sie die Gesamtladung

   (7) $$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\ \rho_0(\mathbf{x},t)$$

   mittels der hergeleiteten Ladungsdichte für ein Klein-Gordon-Feld, das sich in einer Superposition aus Antiteilchen und Teilchen befindet:

   (8) $$\psi_0(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(\mathbf{x},t)_+ + \psi(\mathbf{x},t)_-\right)$$

Vorlesung:
- Dienstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
- Donnerstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203

Übung:
- Donnerstag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im EW 731
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 731
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 229

Scheinkriterien:
- Mindestens 60% der Übungspunkte.

Zettel:
- Ausgabe: Dienstags in der Vorlesung.
- Abgabe: 14 Tage später in der Vorlesung.
- Abgabe der Übungszettel in 3-er Gruppen!

Sprechzeiten:
- Prof. Dr. Andreas Knorr: Di, 13–14 Uhr im EW 742
- Dr. Alexander Carmele : Mi, 13–14 Uhr im EW 704
- Alexander Kraft : Fr, 13–14 Uhr im EW 269
- Andreas Koher : N.N.

Literatur
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene(Springer)
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik Teil 2 (de Gruyter)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- W. Greiner, Relativistische Quantenmechanik und Quantentheorie-Spezielle Kapitel, Verlag Harri Deutsch.
- F. Scheck, Quantisierte Felder (Springer)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- P. Atkins, Molecular Quantum Mechanics (Oxford University Press)
- M. Fox, Quantum Optics (Oxford University Press)

Einige der Bücher aus dem Springer Verlag stehen im Netz der TU Berlin als PDF zur Verfügung (siehe Webseite mit Link in den UB Bestand).