Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

2. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 15.11.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Pauli-Matrizen*
Die drei Pauli-Matrizen, σ_i ($i \in \{1,2,3\}$), sind unitär, hermitesch und erfüllen die Gleichung $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = i\,\mathbb{1}$.

(a) Zeigen Sie , dass die Pauli-Matrizen die Kommutator-Ralation, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, und die Antikommutator-Relation, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\,\mathbb{1}$, erfüllen.

(b) Zeigen Sie damit, dass $\sigma_i\sigma_j = i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$ gilt.

(c) Zeigen Sie nun die in der Vorlesung benutzte Identität:

$$(\sigma\cdot\mathbf{A})\,(\sigma\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,\mathbb{1} + i\sigma\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\ .$$

Hier ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträge und $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Vektoren mit drei Skalaren als Einträge.

Aufgabe 4 (5 Punkte): *Dirac-Koeffizienten*
In der Vorlesung haben Sie u.a. durch den Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung Bedingungen hergeleitet, die die Dirac-Koeffizienten α^k, β erfüllen müssen.
Verifizieren Sie, dass die folgenden Koeffizienten diese Bedingungen erfüllen ($k = 1,2,3$):

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

(a) α^k, β sind hermitesche Matrizen.

(b) $\alpha^l\alpha^k + \alpha^k\alpha^l = 2\delta_{kl}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(c) $\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0$.

(d) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(e) $\mathrm{Sp}[\alpha^k] = 0$.

Aufgabe 5 (8 Punkte): *Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie*
Der Dirac-Hamiltonian eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c\sum_{k=1}^{3} \hat{\alpha}^k \hat{p}_k + \hat{\beta} m_0 c^2$. Die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sind durch $\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ nicht mit $\hat{H}$ vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators.

(b) Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit $\hat{H}$ vertauscht.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass jedoch der Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mit $\hat{H}$ vertauscht.