Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

3. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 22.11.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 6 (20 Punkte): *Umeichung der Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld*

Leiten Sie ausgehend von der Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{m_0}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\ \phi(\mathbf{r},t) + q\ \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

den folgenden Hamiltonfunktion her:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + q\phi - q\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} - \frac{q}{2m_0}\Big(\mathbf{L} + \frac{q}{2}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{B})\Big)\cdot\mathbf{B}. \tag{2}$$

1. Starten Sie hierfür mit der Lagrangefunktion eines geladenen Teilchen L im elektromagnetischen Feld und stellen Sie sicher, dass die Euler-Lagrange-Gleichung auf die Lorentzkraft führt: $\mathbf{F} = m_0\ddot{\mathbf{r}} = q\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})$.
2. Führen Sie nun eine neue Ortsvariable ein: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \mathbf{R}$, wobei $\mathbf{r}_s$ die kleine Verrückung um den zeitlich konstanten Aufsatzpunkt $\mathbf{R}$ darstellt. Entwickeln Sie das skalare Potential $\phi(\mathbf{r},t)$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ bis zur 1. Ordnung in $\mathbf{r}_s$. Schreiben Sie nun die genäherte Lagrange-Funktion in den neuen Variablen $L = L(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s, t)$, wobei $\dot{\mathbf{R}} = 0$ gilt.
3. Nutzen Sie die Eichfreiheit der Lagrangefunktion: $L' = L + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}_s,t)$ aus, und wählen Sie folgende Eichfunktion: $F(\mathbf{r}_s,t) = -q\ \mathbf{r}_s\cdot\mathbf{A}(\mathbf{R},t) - \frac{q}{2}\mathbf{r}_s\cdot(\mathbf{r}_s\cdot\nabla_{\mathbf{r}_s}\mathbf{A}|_{\mathbf{r}_s=0})$. Vernachlässigen Sie alle zweiten Ableitungen der Potentiale. Ihre umgeeichte Lagrangefunktion erhält die Form mit $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}$ und $\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}(\mathbf{R},t) := \nabla_{\mathbf{r}_s}\mathbf{A}(\mathbf{R}+\mathbf{r}_s,t)|_{\mathbf{r}_s=0}$:
$$\begin{aligned} L' = &\frac{m_0}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{R},t) - q\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}\phi(\mathbf{R},t) - q\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{R},t)\\ &+\frac{q}{2}\dot{\mathbf{r}}\cdot[\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}(\mathbf{R},t)] - \frac{q}{2}\mathbf{r}\cdot[\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}(\mathbf{R},t)]\,. \end{aligned} \tag{3}$$
4. Zeigen Sie, dass gilt: $\dot{\mathbf{r}}\cdot[\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}] - \mathbf{r}\cdot[\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}] = (\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$. Nun können Sie die Lagrangefunktion in $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}$ ausdrücken.
5. Führen Sie eine Legendre-Transformation durch, um zum gewünschten Hamilton-Operator zu gelangen:
$$H = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{r}} - L', \tag{4}$$
wobei $\mathbf{p} = \frac{\partial L'}{\partial\dot{\mathbf{r}}}$. Den Pauli-Hamilton-Operator erhalten Sie nun, wenn Sie die relativistische Korrektur berücksichtigen und den gyromagnetischen Faktor $g = 2$ einführen:
$$\mathbf{H}_{\mathsf{Pauli}} = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + q\phi - q\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} - \frac{q}{2m_0}\Big(\mathbf{L} + \frac{q}{2}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{B})\Big)\cdot\mathbf{B}\right)\mathbb{1} - \frac{q}{2m_0}g\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{B}. \tag{5}$$