Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

5. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 06.12.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung*

Gegeben sei der Hamiltonoperator in 2. Quantisierung:

$$H = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\Psi^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

ohne Vielteilchenwechselwirkungen.

1. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für $\Psi(\mathbf{r},t)$ mit Hilfe der Heisenbergbewegungsgleichung für ein Fermionisches und ein Bosonisches Feld $\Psi(\mathbf{r},t)$. Zeigen Sie insbesondere, dass gilt:
$$\imath\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2}$$
also die Schrödingergleichung für Feldoperatoren.

2. Wiederholen Sie (aus der Vorlesung), dass für einen Hamiltonoperator der Form: $H = \sum_n \varepsilon_n a_n^\dagger a_n$ unter Verwendung der Heisenbergbewegungsgleichung, die Zeitabhängigkeit von a_n zu:
$$a_n^\dagger(t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\varepsilon_n(t-t_0)}a_n^\dagger(t_0) \tag{3}$$
ergibt. Tun Sie dies sowohl für Bosonen und Fermionen.

3. Zeigen Sie unter Verwendung der vorherigen Punkte, dass aus dem Ansatz $\Psi(\mathrm{r},t) = \sum_n a_n(t)\varphi_n(\mathbf{r})$ die Gültigkeit der stationären Schrödingergleichung:
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right)\varphi_n(\mathbf{r}) = \varepsilon_n\varphi_n(\mathbf{r}) \tag{4}$$
folgt.

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Symmetrien der Zweiteilchenwellenfunktion*
Der Zustand bei dem sich zwei Teilchen $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1)$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2)$ im System befinden und zwar an den Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ mit den Spins $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ ist gegeben als:

$$|\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\Psi^\dagger(\mathbf{x}_1)|0\rangle \tag{5}$$

mit dem Vakuumzustand $|0\rangle$. Der Zustand bei dem ein Teilchen sich im Zustand λ_1 befindet und ein weiteres im Zustand λ_2 ist gegeben als:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger|0\rangle. \tag{6}$$

1. Berechnen Sie die Zweiteilchenwellenfunktion, die definiert ist als:
$$\Phi_{\lambda_1,\lambda_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \langle\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2|\lambda_1,\lambda_2\rangle \tag{7}$$
sowohl für Fermionen als auch für Bosonen. Folgen Sie dabei dem Ansatz aus der Vorlesung.

2. Überprüfen Sie für den Fermionischen und für den Bosonischen Fall wie sich $\Phi_{\lambda_1,\lambda_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ unter der Vertauschung der beiden Koordinaten $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ verhält.