Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

6. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 13.12.2016 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (20 Punkte): *Das elektromagnetische Feld als Ensemble harmonischer Oszillatoren*

Ausgehend von der Lagrangeformulierung der Maxwelltheorie in der relativistischen 4er-Schreibweise soll folgende, einem harmonischen Oszillator entsprechende Hamiltonfunktion hergeleitet werden:

$$H = \sum_{\lambda,\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2}\left(c_{\lambda,\mathbf{k}}c^*_{\lambda,\mathbf{k}} + c^*_{\lambda,\mathbf{k}}c_{\lambda,\mathbf{k}}\right), \tag{1}$$

wobei $c^{(*)}_{\lambda,\mathbf{k}}$ der Amplitudenkoeffizient des transversalen elektromagnetischen Feldes bezeichnet mit Wellenvektor $\mathbf{k}$ und Polarisationsrichtungen $\lambda = 1, 2$ bezeichnet.

1. Beginnen Sie mit der Lagrangedichte für den Vakuumfall (keine Ströme, keine Ladungen) in der 4er-Schreibweise $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Der Feldtensor des elektromagnetischen Feldes ist wie folgt definiert:
$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c_0} & \frac{E_y}{c_0} & \frac{E_z}{c_0} \\ -\frac{E_x}{c_0} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c_0} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c_0} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte explizit folgende Form annimmt: $\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\mathbf{E}^2 - c_0^2\mathbf{B}^2\right)$. Verwenden Sie hierfür die Minkowski-Metrik: $\eta^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$.
2. Um die Euler-Lagrange-Gleichung anzuwenden, drücken Sie die Lagrangedichte mit Hilfe des Vektorpotentials aus: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, wobei $A_\mu = (\phi/c_0, -A_x, -A_y, -A_z)$ und $\partial_\mu = (\partial_t/c_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung: $\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} - \frac{\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0$, um die inhomogenen Maxwellgleichungen zu bestätigen: $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ und $\nabla\times\mathbf{B} = c_0^{-2}\partial_t\mathbf{E}$.
3. Leiten Sie nun explizit die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes mittels der bekannten Legendretransformation her:
$$H = \int d^3r\left(\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}\right) = \int d^3r \frac{\epsilon_0}{2}\left(\mathbf{E}^2 + c_0^2\mathbf{B}^2\right), \qquad \Pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \tag{3}$$
4. Entwickeln Sie das Vektorpotential nach Moden, wie in der Vorlesung, und schreiben Sie explizit:
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}}\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}\left(c_{\lambda,\mathbf{k}}e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c^*_{\lambda,\mathbf{k}}e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right), \tag{4}$$
wobei $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ der zugehörige Polarisationsvektor für jede Mode beschreibt. Bestätigen Sie mittels $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, dass die Maxwellgleichungen im Vakuum erfüllt sind, wobei $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 = \mathbf{k}\cdot\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ gilt.
5. Setzen Sie nun die Modenentwicklung in Ihre Hamiltonfunktion ein und vertauschen Sie während der Rechnung nicht die Reihenfolge der Amplitudenkoeffizienten. Verwenden Sie, dass gilt: $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}\cdot\epsilon_{\mathbf{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$. Sie erhalten die oben angegebene Hamiltonfunktion, die nun als Grundlage zur Zweitquantisierung des elektromagnetischen Feldes dient.