Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Alexander Carmele, Andreas Koher, Alexander Kraft

7. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 10.01.2017 um 8.15 Uhr, Beginn der Vorlesung!
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Quantisiertes Lichtfeld: Vertauschungsrelationen*

Das quantisierte Elektrische- und Magnetfeld sind gegeben als:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} i\omega_k \hat{\epsilon}_{\lambda,\vec{k}} E_{\vec{k}} c_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + h.c., \tag{1}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{i\vec{k}\times\hat{\epsilon}_{\lambda,\vec{k}}}{\mu_0} E_{\vec{k}} c_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + h.c. \tag{2}$$

hierbei ist $\hat{\epsilon}_{\lambda,\vec{k}}$ der Vektor für die Polarisationerichtung, $\lambda \in 1,2$ indiziert jeweils die beiden Polarisationsrichtungen für die transversalen Felder und $E_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}}$. Die Photonoperatoren erfüllen bosonischen Vertauschungsrelationen:

$$[c_{\vec{k},\lambda}, c_{\vec{k}',\lambda'}] = [c^\dagger_{\vec{k},\lambda}, c^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = 0, \quad [c_{\vec{k},\lambda}, c^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{3}$$

Berechnen Sie ausgehen von Gleichungen (1)-(3) die Vertauschungsrelationen zwischen dem Elektrischen- $\vec{E}(\vec{r},t)$ und dem Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r},t)$:

1. Für parallele Komponenten der Felder $[E_i(\vec{r},t), H_i(\vec{r'},t)] = 0$.
2. Für senkrechte Komponenten der Felder $[E_i(\vec{r},t), H_j(\vec{r'},t)] = -i\hbar c^2 \frac{\partial}{\partial m}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$, wobei i, j, m zyklische Permutationen der kartesischen Koordinaten.

Tipp: Benutzen Sie, dass für das Dyadische Produkt von Einheitsvektoren gilt $\sum_i \vec{e}_i\vec{e}_i = 1$ und somit auch für die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \hat{\epsilon}_{1,\vec{k}}$, $\vec{e}_2 = \hat{\epsilon}_{2,\vec{k}}$ and $\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k}$.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Varianz von der Kohärenz und der Intensität des Elektromagnetischen Feldes*

Berechnen Sie die *Kohärenz* $\langle E\rangle$ und die *Varianz* $(\Delta E)^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$ des einmodigen elektromagnetischen Feldes $\vec{E} = i\vec{\mathcal{E}}_0\big(\xi(\vec{r})c(t) - \xi^*(\vec{r})c^\dagger(t)\big)$, (mit $\xi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$) jeweils für Licht im:

1. Fock-Zustand $|n_0\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$, wobei $\rho_n = |c_n|^2 = \delta_{nn_0}$,
2. kohärenten Zustand $|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ wobei $c_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$,
3. thermischen Zustand $\rho = (1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}})e^{-\frac{\hbar\omega c^\dagger c}{k_B T}}$.

Wiederholen Sie dieselbe Rechnung für die Photonzahl $n = \langle c^\dagger c\rangle$ und die Varianz der Photonzahl $(\Delta n)^2 = \langle (c^\dagger c)^2\rangle - \langle c^\dagger c\rangle^2$. Diskutieren Sie die Ergebnisse in den Spezialfällen hoher und verschwindender Intensität des jeweiligen Lichtfeldes.