Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

19. Januar 2018

Zusatz-Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Montag 05.02.18 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Killing-Vektoren***

Killing-Vektoren kennzeichnen die Symmetrie einer Raumzeit. Sie ergeben sich als Lösung der Killing-Gleichung

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für einen Killing-Vektor ξ^α gilt

$$\xi_{\nu;\lambda;\mu} = R_{\kappa\mu\lambda\nu}\xi^\kappa. \tag{2}$$

Benutzen Sie dazu die für jeden Vektor gültige Gleichung

$$A_{\mu;\lambda;\nu} - A_{\mu;\nu;\lambda} = R_{\mu\kappa\nu\lambda}A^\kappa \tag{3}$$

und die Gleichung

$$R_{\beta\gamma\delta}{}^\alpha + R_{\delta\beta\gamma}{}^\alpha + R_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha = 0. \tag{4}$$

b) Gleichung (2) zeigt, dass in einem gegebenen Riemannschen Raum aus den Killing-Vektoren ξ_ν und dessen Ableitungen $\xi_{\nu;\mu}$ alle höheren Ableitungen bestimmt werden können. Somit kann durch Vorgabe von ξ_ν und $\xi_{\nu;\mu}$ in einem Punkt das Killing-Vektorfeld bestimmt werden. Wegen Gleichung (1) kann man im 4-dimensionalen Raum maximal 10 Killing-Vektoren finden. Eine Eigenschaft der Räume mit 10 Killing-Vektoren soll nun berechnet werden. Benutzen Sie die Definitionsgleichung des Krümmungstensors (3) angewandt auf das Tensorfeld $\xi_{\nu;\mu}$ um die für jeden Killing-Vektor gültige Beziehung

$$\left(R_{\kappa\alpha\beta\nu;\mu} - R_{\kappa\mu\beta\nu;\alpha}\right)\xi^\kappa + \left(R^\kappa{}_{\alpha\beta\nu}\delta^\sigma_\mu - R^\kappa{}_{\mu\beta\nu}\delta^\sigma_\alpha + R^\kappa{}_{\nu\mu\alpha}\delta^\sigma_\beta - R^\kappa{}_{\beta\mu\alpha}\delta^\sigma_\nu\right)\xi_{\kappa;\sigma} = 0 \tag{5}$$

zu beweisen.

c) Bestimmen Sie nun mittels Gleichung (5), im Fall dass die maximale Anzahl von Killing-Vektoren vorliegen soll (d.h. man kann die ξ_ν und $\xi_{\nu;\mu}$ frei vorgeben), den Krümmungstensor. Zeigen Sie insbesondere auch, dass diese Räume eine konstante Krümmung besitzen.