Prof. Dr. Kathy Lüdge
Dr. Arash Azhand, Alexander Kraft, Manuel Katzer, Lasse Ermoneit

2. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 08.11.2017 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 4 (5 Punkte): *Green'sche Identitäten*

Seien $\Theta(\mathbf{r})$ und $\Psi(\mathbf{r})$ zwei skalare, zweimal stetig differenzierbare Felder. Beweisen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes

(a) die 1. Green'sche Identität

$$\int_V \mathrm{d}V \, (\Theta \, \Delta\Psi + \nabla\Theta \cdot \nabla\Psi) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\Theta \, \nabla\Psi) \quad \text{und}$$

(b) die 2. Green'sche Identität

$$\int_V \mathrm{d}V \, (\Theta\Delta\Psi - \Psi\Delta\Theta) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot (\Theta \, \nabla\Psi - \Psi \, \nabla\Theta) \, ,$$

wobei $\mathrm{d}\mathbf{f}$ das orientierte Flächenelement senkrecht zur Oberfläche ∂V bezeichnet.

(c) Zwei skalare Felder $\Phi_1(\mathbf{r})$ und $\Phi_2(\mathbf{r})$ erfüllen beide die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi_1(\mathbf{r}) = \Delta\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{-\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Auf der Oberfläche ∂V gelte $\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r})$ (vgl. Dirichlet Randbedingung). Zeigen Sie, dass dann $\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r})$ überall in V gilt.

Tipp: Benutzen Sie die Green'sche Identität aus Aufgabenteil (a) für das skalare Feld $\Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$.

Aufgabe 5 (7 Punkte): *Multipole*

Betrachten Sie die Multipol-Entwicklungen der folgenden Ladungsverteilungen:

(a) An zwei Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge d) befinden sich Punktladungen der Größe q. Am dritten Eckpunkt befindet sich eine Punktladung der Größe $-q$. Bestimmen Sie Monopol- und Dipolmoment dieser Ladungsanordnung.

(b) Auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen a und b sei die Ladung q homogen verteilt. Bestimmen Sie den Quadrupoltensor Q_{kl}, zeigen Sie, dass dieser nur einen unabhängigen Eintrag $Q := Q_{33}$ besitzt, und berechnen Sie Q.

Hinweis: Ein Punkt $\underline{r}'$ auf der Oberfläche eines im Ursprung zentrierten Rotationsellipsoiden erfüllt

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z'}{b}\right)^2 = 1.$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 6 (8 Punkte): *Unendlich ausgedehnter Plattenkondensator*

Zwei unendlich ausgedehnte, beliebig dünne und zueinander parallele Platten besitzen eine homogen verteilte Flächenladungsdichte σ_0 und $-\sigma_0$ und den Abstand d. Eine der beiden Platten liegt in der x-y-Ebene und die andere befindet sich bei $z = d$.

(a) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das daraus resultierende Potential $\Phi(\mathbf{r})$ zunächst für **eine** Platte in der x-y-Ebene mit $\sigma = \sigma_0$. Sind das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das Potential Φ an der Grenzfläche stetig?

(b) Berechnen Sie nun $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\Phi(\mathbf{r})$ für die oben beschriebene Anordnung zweier Platten. Wie verhalten sich das elektrische Feld und das Potential nun an den Grenzflächen? Skizzieren Sie außerdem die z-Komponente des elektrischen Feldes $E_z(z)$ sowie das Potential $\Phi(z)$ als Funktion von z.

(c) Berechnen Sie die Energiedichte w des elektrostatischen Feldes.

(c) Was geschieht für den Grenzfall $d \to 0$ unter der Bedingung $D = d\sigma_0 =$ const.? Bleibt das daraus resultierende Potential bei $z = 0$ stetig? (Keine Rechnung, nur physikalische Begründung)

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Kathy Lüdge	Fr. 13:00 - 14:00	EW 741
Dr. Arash Azhand	Do. 14:00 - 15:00	EW 627
Alexander Kraft	Mi. 13:00 - 14:00	EW 269
Manuel Katzer	Di. 16:00 - 17:00	EW 060
Lasse Ermoneit	Mo. 14:00 - 15:00	EW 060