Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

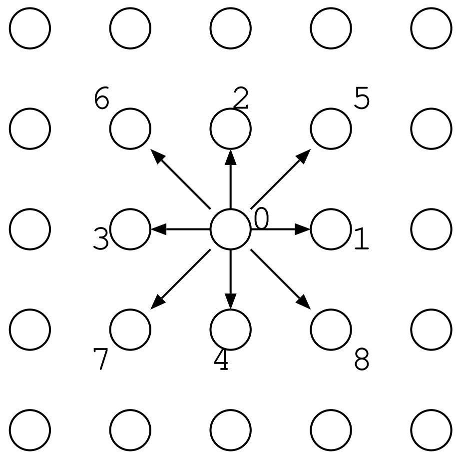
Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Marten Richter, Andreas Koher
Willy Knorr, Philip Knospe, Ché Netzer, Philipp Stammer

5. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 29. November 2017 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (14 Punkte): *Gitterschwingungen*



Wir stellen die Lagrangegleichungen für Atome auf einem zweidimensionalen quadratischen Gitter mit 1-atomiger Basis auf. Die Position sei $\mathbf{R}_{ix,iy}$, wobei ix und iy die Atome entlang der x und y Achse indizieren. Wir haben insgesamt N_0 Atome und diese haben die Masse M, die Gitterkonstante sei a. Wir führen Koordinaten $\mathbf{u}_{ix,iy} = \mathbf{R}_{ix,iy} - \mathbf{R}^0_{ix,iy}$ relativ zur Gleichgewichtsposition $\mathbf{R}^0_{ix,iy}$ ein.

1. Wie sieht die kinetische Energie T in den Koordinaten $\mathbf{u}_{ix,iy}$ aus?

2. Zwischen zwei Atomen wirkt das abstandsabhängige Potential $\phi(\mathbf{R}_{ix,iy} - \mathbf{R}_{ix',iy'})$. Zeigen Sie, dass ϕ über eine Taylorentwicklung in zweiter Ordnung bzgl. $\mathbf{u}$ in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\phi(\mathbf{u} + \mathbf{R}^0_{ix,iy} - \mathbf{R}^0_{ix',iy'}) = - \sum_{j_1,j_2=x,y,z} \tilde{\phi}^{j_1 j_2}_{ix,iy,ix',iy'} u^{j_1} u^{j_2} + C,$$

wobei $C = const.$

3. Im folgenden betrachten wir nur die Wechselwirkung zu den nächsten und übernächsten Nachbarn (1,2,3,4 bzw. 5,6,7,8) in der Skizze. Wir nähern das Potential als $\phi_{NN}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_N + \mathbf{R}^0_0 - \mathbf{R}^0_N) = \frac{k_1}{2}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_N)^2$ zwischen dem Atom $\mathbf{u}_0$ und seinen nächsten Nachbarn $\mathbf{u}_N$ an, bzw. als $\phi_{uN}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{uN} + \mathbf{R}^0_0 - \mathbf{R}^0_{uN}) = \frac{k_2}{2}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{uN})^2$ zwischen dem Atom $\mathbf{u}_0$ und seinem übernächsten Nachbarn $\mathbf{u}_{uN}$ an. (Bemerkung: Die isotrope Näherung entfernt den Unterschied zwischen longitudinalen und transversalen Anregungen). Stellen Sie die potentielle Energie für das gesamte Gitter unter Verwendung dieser Näherung auf. Anschließend geben Sie die zugehörige Lagrangefunktion an.

4. Bringen Sie die Lagrangefunktion auf die folgende Form:

$$L = T + \sum_{ix,iy,j} (A {u^j_{ix,iy}}^2 - B_1 u^j_{ix,iy} u^j_{ix+1,iy} - B_2 u^j_{ix,iy} u^j_{ix,iy+1} - B_3 u^j_{ix,iy} u^j_{ix+1,iy+1} - B_4 u^j_{ix,iy} u^j_{ix-1,iy+1})$$

   Bitte verwenden Sie die Konstanten A, B_k $(k = 1, .., 4)$ nicht in der weiteren Rechnung, diese haben keine physikalische Relevanz und dienen nur zur Illustration der Form.

5. Wir führen nun neue *kollektive* Koordinaten ein:

$$u^j_{ix,iy} = \sum_{\mathbf{q}} A^j(\mathbf{q}, t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^0_{ix,iy}} (MN_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

   Beachten Sie, dass $A^j(\mathbf{q}, t)$ komplex ist. Was folgt für $A^j(\mathbf{q}, t)$ aus der Tatsache, dass $u^j_{ix,iy}$ reell ist?

6. Setzen Sie $A^j(\mathbf{q}, t)$ in die Lagrangefunktion ein und vereinfachen Sie diese! Es sollten am Ende keine komplexen Größen mehr dastehen! (Zerlegen Sie dazu $A^j(\mathbf{q}, t)$ in seinen real und imaginären Anteil).

7. Stellen Sie die Euler-Lagrangegleichungen für den realen und imaginären Anteil von $A^j(\mathbf{q}, t)$ auf. Identifizieren Sie die Dispersionsrelation der Gitterschwingungen (also die Schwingungsfrequenz in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$).

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Variationsrechnung*

Wir beschreiben eine Kurve der Länge l in der Ebene parametrisiert durch s als $(x(s), y(s))$. Welche Kurve(nform) umschließt die größte Fläche? Verwenden Sie Variationsrechnung zur Lösung! Dazu machen Sie die folgenden Schritte:

1. Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Kurvenlänge l auf.

2. Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts über ein Kurvenintegral auf.

3. Stellen Sie eine Lagrangefunktion für dieses Variationsproblem mit Nebenbedingung auf (Achtung: das ist nicht die Lagrangefunktion der Mechanik!).

4. Beantworten Sie die obige Frage unter Verwendung der Euler-Lagrange Gleichungen.