

## 7. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Mi. 13. Dezember 2017 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201**

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte und Kommentare** zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.

### **Aufgabe 1 (6 Punkte):** Lagrangedichte Gravitationspotential und Anwendung

Gegeben sei die Lagrangedichte für Felder

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)\phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi\gamma}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2$$

mit der Massendichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  und dem Gravitationspotential  $\phi(\mathbf{r})$ . Das Newtonsche Gravitationsfeld  $g(\mathbf{r})$  besitzt den üblichen Zusammenhang mit dem Potential  $g(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ .

1. Verwenden Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für Felder

$$\sum_{i=x,y,z,t} \frac{d}{di} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

um eine partielle Differentialgleichung für  $\phi(\mathbf{r})$  herzuleiten.

2. Leiten Sie daraus die Gleichung  $-\nabla \cdot g(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}, t)$  ab.
3. **Anwendung:** Betrachten Sie eine Kugel mit Radius  $R$  und homogener Massendichte  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$  (im Innern der Kugel). Berechnen Sie das Gravitationsfeld innerhalb und außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dafür den Satz von Gauß. Nutzen Sie in beiden Fällen die Symmetrie des Problems aus.
4. Skizzieren Sie die Feldstärke als Funktion des Radius  $r$ .

### **Aufgabe 2 (6 Punkte):** Hamiltonmechanik: Teilchen im Zentralfeld

Wir betrachten ein Teilchen im Zentralpotential  $V(r)$ . Wir wissen, dass sich in diesem Fall die Bewegung nur in einer Ebene abspielt.

1. Ausgehend von einer Bewegung in xy-Ebene leiten Sie die Lagrangefunktion bzgl. der Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  als generalisierte Koordinaten her.
2. Bestimmen Sie die generalisierten Impulse. Entspricht einer dieser Impulse schon bekannten Erhaltungsgrößen?
3. Führen Sie eine Legendretransformation durch, um die passende Hamiltonfunktion zu erhalten.
4. Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf. Welche generalisierten Koordinaten sind zyklisch? Welchen Erhaltungsgrößen entsprechen diese?

**Aufgabe 3 (8 Punkte):** *Lagrange und Hamilton mit LC-Stromkreis*

Wir betrachten einen Stromkreis, der nur aus einer Induktivität  $L$  und einem Kondensator  $C$  besteht. Die Spannung und Ladung am Kondensator bezeichnen wir mit  $U$  und  $Q$ . Der Fluß  $\phi$  hängt über  $\phi = LI$  mit der Induktivität zusammen. Für den Strom  $I$  im Stromkreis gilt  $I = \dot{Q}$ .

1. Drücken Sie die Energie des Kondensators und der Induktivität so aus, dass die einzigen zeitabhängigen Größen  $Q$  und  $\dot{Q}$  sind. Identifizieren Sie die kinetische und die potentielle Energie bzgl. der Koordinate  $Q$  und stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf.
2. Bestimmen Sie anschließend den kanonischen Impuls bzgl.  $Q$  und stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf. Welcher physikalischen Größe entspricht der kanonische Impuls hier? Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen formal und geben Sie die Frequenz des Schwingkreises an.
3. Drücken Sie die Energie des Kondensators und der Induktivität so aus, dass die einzigen zeitabhängigen Größen  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  sind (Verwenden Sie das Faraday'sche Gesetz  $U = -L\dot{I}$ ). Identifizieren Sie die kinetische und die potentielle Energie bzgl. der Koordinate  $\phi$  und stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf.
4. Bestimmen Sie anschließend den kanonischen Impuls bzgl.  $\phi$  und stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf. Welcher physikalischen Größe entspricht der kanonische Impuls hier? Vergleichen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Koordinate  $Q$  und die Koordinate  $\phi$ , gibt es einen Unterschied?