Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Marten Richter, Andreas Koher
Willy Knorr, Philipp Knospe, Ché Netzer, Philipp Stammer

8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 20. Dezember 2017 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (16 Punkte): *Elektron im magnetischen Feld*
Ein Elektron (Masse m, Ladung $-e$) befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\underline{B} = (0, 0, B_0) = \text{rot}\underline{A}$ mit $B_0 \in \mathbb{R}$. Für das Vektorpotential $\underline{A}$ gelte $\text{div}\underline{A} = 0$.

1. Zeigen Sie, dass $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$ eine denkbare Darstellung des mehrdeutigen Vektorpotentials ist.
2. Verwenden Sie die kartesischen Koordinaten als generalisierte Größen: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ und stellen Sie die Lagrange-Gleichung auf. Bestimmen Sie aus dieser mindestens zwei Erhaltungsgrößen.
3. Berechnen Sie aus der Lagrange-Funktion den kanonischen Impuls $\underline{p}$ und vergleichen Sie diesen mit dem kinetischen Impuls $\underline{p}_{kin} = m\dot{\underline{r}}$.
4. Stellen Sie über eine Legendre-Transformation die Hamiltonfunktion auf und verifizieren Sie die folgende Darstellung:
$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_1 - \frac{1}{2}m\omega_c q_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_2 + \frac{1}{2}m\omega_c q_1\right)^2 \quad , \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}$$
5. Setzen Sie von jetzt an $p_3 = 0$. Eine Phasentransformation $(\underline{q}, \underline{p}) \to (\hat{\underline{q}}, \hat{\underline{p}})$ werde durch die folgende Erzeugende bewirkt:
$$F_1(\underline{q}, \hat{\underline{q}}) = m\omega_c\left(q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2 - \hat{q}_1\hat{q}_2 - \frac{1}{2}q_1 q_2\right), \quad \omega_c = eB_0/m$$
Berechnen Sie die Transformationsformeln $\hat{\underline{q}} = \hat{\underline{q}}(\underline{q}, \underline{p})$, $\hat{\underline{p}} = \hat{\underline{p}}(\underline{q}, \underline{p})$, $\underline{q} = \underline{q}(\hat{\underline{q}}, \hat{\underline{p}})$ und $\underline{p} = \underline{p}(\hat{\underline{q}}, \hat{\underline{p}})$.
6. Bestätigen Sie die transformierte Hamilton-Funktion $\hat{H}(\hat{\underline{q}}, \hat{\underline{p}}) = \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}\hat{q}_2^2$ und leiten Sie die kanonischen Gleichungen für $\hat{\underline{q}}$ und $\hat{\underline{p}}$ ab.
7. Lösen Sie dieses eindimensionale Problem. Welche Bahn beschreibt das Teilchen?

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Anwendung einer kanonischen Transformation*
Gegeben seien ein mechanisches System mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 q^4 + \frac{k}{2q^2}$$

und die Erzeugende einer kanonischen Transformation:

$$M_1(q, Q) = -\sqrt{mk}\frac{Q}{q}.$$

1. Wie lauten die Transformationsformeln

$$p = p(Q, P) \text{ und } q = q(Q, P)?$$

2. Wie lautet die neue Hamilton-Funktion

$$\overline{H} = \overline{H}(Q, P)?$$

3. Was für ein physikalisches System wird durch die Hamilton-Funktion beschrieben. Geben Sie die Lösung des Problems in den Variablen Q, P an (Rechnung ist nicht nötig!).