Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Marten Richter, Andreas Koher
Willy Knorr, Philip Knospe, Ché Netzer, Philipp Stammer

9. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 17. Januar 2018 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei der Bepunktung wird Wert gelegt auf **ausführliche Zwischenschritte** *und* **Kommentare** *zur Lösungsstrategie. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an! Elektronische, gedruckte oder kopierte Abgaben (Ausnahme Numerikaufgaben) sind nicht zugelassen.*

Aufgabe 1 (11 Punkte): *Poisson-Klammer-Relationen*
Nutzen Sie die allgemeine Definition der Poisson-Klammer aus, um für Funktionen $f(\{q_k\},\{p_k\},t)$, $g(\{q_k\},\{p_k\},t)$ und $h(\{q_k\},\{p_k\},t)$ die folgenden Identitäten zu beweisen:

1. Antisymmetrie $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
2. Bilinearität $\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$,
3. Produktregel $\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$,
4. Jacobi-Identität $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.
   Hinweis: Rechnen Sie zunächst $\{f,\{g,h\}\}$ explizit aus. Die Klammern $\{g,\{h,f\}\}$ und $\{h,\{f,g\}\}$ können dann durch Vertauschung von f, g, h erhalten werden.
5. Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen wieder eine Konstante der Bewegung ist.
   Hinweis: Benutzen Sie die Jacobi-Identität aus Teilaufgabe 4).
6. Berechnen Sie die Fundamentalrelationen $\{q_i,q_j\} = 0$, $\{p_i,p_j\} = 0$ und $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$,
7. Zeigen Sie die folgenden Poissonklammer-Relationen für die Komponenten des Drehimpulses ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$):
$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Trägheitstensor*
Gegeben sei ein Zylinder der Höhe h und des Radiuses R mit der homogen Massendichte ρ. Die Symmetrieachse des Zylinders sei entlang der z-Achse, der Schwerpunkt des Zylinders sei im Koordinatenursprung. Berechnen Sie alle Elemente $J_{\mu\nu}$ des Trägheitstensors des Zylinders.

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Hamilton-Jacobi Gleichungen und harmonischer Oszillator*
Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit seiner Hamiltonfunktion $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$.

1. Verwenden Sie die Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen für die Wirkung $S(q,\overline{p},t)$ mit dem Separationsansatz:
$$S(q,\overline{p},t) = W(q|\overline{p}) + V(t|\overline{p}),$$
(wobei $\overline{p} = \alpha$ die später auftretende Integrationskonstante ist), um zu zeigen dass:
$$S(q,\overline{p},t) = m\omega_0 \int \mathrm{d}q \sqrt{\frac{2\overline{p}}{\omega_0^2 m} - q^2} - \overline{p}t.$$
Tipp: Identifizieren Sie die auftretende Integrationkonstante mit $\overline{p}$.

2. Verwenden Sie $\overline{q} = \frac{\partial S}{\partial \overline{p}}$, um zu zeigen, dass

$$q = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\sin(\omega_0(\overline{q}+t)).$$

   Was ist $\overline{q}$ für eine physikalische Größe?

3. Verwenden Sie $p = \frac{\partial S}{\partial q}$, um zu zeigen, dass

$$p = m\omega_0\cos(\omega_0(\overline{q}+t)).$$

   Interpretieren Sie die Ergebnisse!