

Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
MSc. Rico Berner, Dr. Javier Cerrillo, Dr. Benjamin Lingnau

1. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 30.10.2017 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 1 (8 Punkte): *Unschärferelation*

Schätzen Sie die Größenordnung der Dauer, über die ein Stift auf seiner Spitze balanciert werden kann, wenn die einzige Einschränkung durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegeben ist. Nehmen Sie an, dass die Spitze scharf ist und auf einer harten Oberfläche ruht. Sie dürfen Näherungen machen, die die Größenordnung des Ergebnisses nicht ändern. Nehmen Sie vernünftige Werte für Abmessungen und Gewicht des Stifts an. Geben Sie ein genähertes numerisches Resultat in Sekunden an.

Lösungsvorschlag:

Betrachten Sie den Stift als Massenpunkt im Abstand l zur Spitze und stellen Sie die Quanten-Bewegungsgleichung auf (mathematisches Pendel auf dem Kopf). Nähern Sie diese für kleine Winkel φ und Auslenkung x , so dass $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und $\varphi \approx x/l$, bis auf die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen. Beim loslassen befindet sich der Stift am Anfang im Grundzustand des harmonischen Oszillators $\Psi(x) = \left(\frac{m\sqrt{g}}{\pi\hbar\sqrt{l}}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\sqrt{g}x^2}{2\hbar\sqrt{l}}}$ (warum?). Sagen wir, der Stift sei umgefallen, wenn $\Delta x(t) > l/4$. Wer mag, kann sich mit einem eiswürfelähnlichen Gegenstand überzeugen, dass die durch die Quantenmechanik gesetzte Zeitmarke nicht zu knacken ist, und dies im Tutorium demonstrieren.

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Zwei-Niveau System*

Ein Zwei-Niveau System ist gegeben durch den Hamiltonoperator

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) + b(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|),$$

wobei a und b positive Zahlen mit der Dimension einer Energie sind.

- Finden Sie die Energieeigenwerte und die entsprechenden Eigenkets (als Linearkombination von $|1\rangle$ und $|2\rangle$).
- Nehmen Sie an, wir hätten uns vertippt und geschrieben

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) + b|1\rangle\langle 2|.$$

Welches grundlegende Prinzip wäre dann verletzt? Illustrieren Sie das Problem, indem Sie den anfänglichen Zustand $|\psi(0)\rangle = |2\rangle$ mit dem ungültigen Hamiltonoperator zeitentwickeln. Welche Bedingung an eine Wellenfunktion ist dann nicht mehr erfüllt? Der Einfachheit halber dürfen Sie hier $a = 0$ annehmen.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Zeitentwicklungsoperator für Bloch-Elektronen*

Elektronen im Kristall können näherungsweise beschrieben werden durch den Hamiltonoperator

$$H = \sum_{n=1}^N \hbar g (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|),$$

wobei n die Position im Gitter darstellt. Mit Hilfe der Blochzustände $|k_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{k_j}{g}n} |n\rangle$, wobei $\hbar k_j = \hbar g \frac{2\pi}{N} j$ mit $j \in \{0, \dots, N-1\}$ die Quasi-Impulse der Elektronen sind, berechnen Sie die Matrixelemente $\langle k_j | U(t) | k_i \rangle$ des Zeitentwicklungsoperators $U = e^{-iHt/\hbar}$.

1. Übung TPV WS17/18

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Vorstellen einer Übungsaufgabe im Tutorium.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes.

Vorlesung:

- Dienstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Udo Scherz, Quantenmechanik, Eine kompakte Einführung, Teubner, U Wiesbaden 2005.
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 6. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1988.
- Franz Schwabl, Quantenmechanik 1 & 2, 7. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2007 (auch als ONLINE-Resource).
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik, 5. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2002 (auch als ONLINE-Resource).
- Albert Messiah, Quantenmechanik; Bd. 1 u. 2. Berlin : de Gruyter, 1990.
- Heinrich Mitter, Quantentheorie, 2., überarb. Aufl., unveränd. Nachdr. , BI-Wiss.-Verl., 1987.
- Walter Greiner, Relativistische Quantenmechanik und Quantentheorie-Spezielle Kapitel, Verlag Harri Deutsch.