Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 20. Dezember 2017
http://www.tu-berlin.de/?qmii_1718

Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
MSc. Rico Berner, Dr. Javier Cerrillo, Dr. Benjamin Lingnau

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 15.01.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 23 (10 Punkte): *Bose-Einstein-Kondensation*

(a) Diskutieren Sie mögliche Werte des chemischen Potentials für die Fermi-Dirac und die Bose-Einstein Statistik $f^{B/F}(\varepsilon, T, \mu)$. Plotten Sie die Verteilungen für verschiedene Temperaturen, dabei sei $\mu = const$. Wie verändert sich die mittlere Teilchenzahl?

(b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Gas von Bosonen der Teilchenzahl $\overline{N}$. Diese läßt sich berechnen als

$$\overline{N} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\infty} f^B(\boldsymbol{k}).$$

$\boldsymbol{k}$ ist der Wellenvektor der Teilchen. Es gilt die Dispersionsrelation $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$. Diese Summe läßt sich in ein Integral überführen. Zeigen Sie, dass sich für die Berechnung der Teilchendichte n das Integral

$$n = (2S+1) \int_0^\infty f^B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

mit der dreidimensionalen Zustandsdichte, $\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} (\frac{2m}{\hbar^2})^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$ ergibt.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die minimal mögliche Temperatur (bei $\mu = 0$). Diese ist die kritische Temperatur der Bose-Einstein-Kondensation T_c. Die mittlere Teilchenzahl $\overline{N}$ ist konstant.
Hinweis: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \approx 2.612$.

(d) Berechnen Sie für $T < T_c$ die Gasdichte $n'(T, T_C)$. Ergeben sich Widersprüche für ein angeschlossenes System und was bedeutet dies ?

(e) Argumentieren Sie, warum bei sehr kleinen Temperaturen beim Übergang von der Summe zum Integral in (b) ein Fehler entsteht.

(f) Machen Sie für die Gesamtteilchendichte n den Ansatz $n = n_{cond} + n'$ mit n_{cond} als der Dichte des Bose-Einstein-Kondensats. Erklären Sie, warum dieser Ansatz den gemachten Fehler korrigiert. Berechnen Sie den Anteil der kondensierten Materie $\frac{n_{cond}}{n}$.

Bonusaufgabe 24 (10 Zusatzpunkte): *Planck'sche Strahlungsformel*
Betrachten Sie ein Photonengas bei konstanter Temperatur in einem Kasten. Die mittlere Energie eines Photons ist $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \hbar\omega(\boldsymbol{k}) = c\hbar k$. Außerdem gilt $\mu = 0$. Damit lautet die mittlere Besetzungszahl für Bosonen im Zustand $\boldsymbol{k}, s$: $< n_{\boldsymbol{k},s} >= \frac{1}{exp(\beta\hbar c k) - 1}$.

(a) Im Zusammenhang mit diesem Problem treten häufig Integrale der Form $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\zeta^{-1} e^x - 1} dx$ auf. Lösen Sie dieses Integral allgemein, indem Sie die Γ-Funktion
$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$ verwenden.
Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe. Es gilt weiterhin $\zeta e^{-x} < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die innere Energie in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$U(T,V) = V\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu$$

und geben Sie die spektrale Energiedichte $u(\nu,T)$ an. Diese Beziehung ist die Planck'sche Strahlungsverteilung.
Hinweis: Nutzen Sie die mittlere Besetzungszahl $< n_{\boldsymbol{k},s} >$.

(c) Zeichnen Sie die Planck'sche Strahlungsverteilung $u(\nu)$ für verschiedene Temperaturen T. Diskutieren Sie den Einfluss von T !

(d) Leiten Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz $U(T,V)$ her, indem Sie die Integration aus Aufgabenteil (b) ausführen.

(e) Bestimmen Sie $\nu_{max}(T)$ bei dem $u(\nu,T)$ maximal ist (Wien'sches Verschiebungsgesetz).
Hinweis: Sie können die auftretende Gleichung numerisch lösen.

Frohe Weihnachten!

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Vorstellen einer Übungsaufgabe im Tutorium.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 203		EW 203	
10-12					EW 114
12-14		EW 229			
14-16					
16-18				EW 226	

Sprechstunden			
ES	Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD	nach Vereinbarung	EW 735
RB	MSc. Rico Berner	**Di 14-15**	ER 245
JC	Dr. Javier Cerrillo	**Do 13-14**	EW 705
BL	Dr. Benjamin Lingnau	**Mi 13-14**	EW 629