Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
MSc. Rico Berner, Dr. Javier Cerrillo, Dr. Benjamin Lingnau

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 13.11.2017 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 7 (10 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Bosonische-Operatoren*

In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

$$\psi(\underline{r},t) = \sum_i \varphi_i(\underline{r}) b_i(t), \quad \psi^\dagger(\underline{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\underline{r}) b_i^\dagger(t) \tag{1}$$

Vertauschungsrelationen eingeführt:

$$[\psi(\underline{r},t), \psi^\dagger(\underline{r}',t)] = \delta(\underline{r}-\underline{r}') \quad \text{Bosonen,} \tag{2}$$

Im Heisenberg-Bild wird die Zeitabhängigkeit von $\psi(\underline{r},t)$ von den Operatoren $b_i^{(\dagger)}(t)$ getragen.

(a) Zeigen Sie explizit durch Einsetzen, dass die jeweiligen Operatoren die bosonische Kommutatorrelation $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ erfüllen.

(b) Für die Leiteroperatoren des quantenmechanischen harmonischen Oszillators wurde in der VL folgende Kommutatorrelation mit vollständiger Induktion bewiesen:

$$bb^{\dagger n} - b^{\dagger n} b = n b^{\dagger n-1} = \frac{\partial (b^{\dagger n})}{\partial b^\dagger}. \tag{3}$$

Sei α eine komplexe Zahl. Zeigen Sie unter Verwendung von 1.) und Gleichung (3), dass für folgende Transformation des bosonischen Vernichters mit der e-Funktion gilt:

$$e^{-\alpha b^\dagger} b e^{\alpha b^\dagger} = b + \alpha. \tag{4}$$

(c) Transformation von Operatoren ins Heisenberg-Bild: Für ein wechselwirkungsfreies bosonisches System ist der Hamiltonoperator durch $H_H = H_0 = \sum_i \hbar\omega_i b_i^\dagger b_i$ gegeben. Zeigen Sie unter Benutzung von 1), dass die Transformation eines Operators $b_i^{(\dagger)}(t) = U^\dagger b_i^{(\dagger)} U$ ins Heisenberg-Bild ergibt:

$$U^\dagger b_i U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{-i\omega_i(t-t_0)} b_i, \tag{5}$$

$$U^\dagger b_i^\dagger U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{i\omega_i(t-t_0)} b_i^\dagger. \tag{6}$$

Tipp: *Fassen Sie dazu die Transformation als $f(\alpha_i) \equiv U^\dagger b_i U$, wobei $\alpha_i = i\omega_i(t-t_0)$ und bilden Sie die Ableitung.*

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Eigenzustände des harmonischen Oszillators*

Mit Hilfe des Vernichtungsoperators $\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_0}{\hbar}\hat{p} - i\frac{\hat{x}}{x_0}\right)$, wobei $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, wird die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators der Masse m und Kreisfrequenz ω.

$$H\Psi(x) = \hbar\omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle H\rangle - \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{b}\Psi(x)\right|^2 \geq 0.$

b) Nach (a) muss der Grundzustand $\Psi_0(x)$ der Differential-Gleichung $\hat{b}\Psi_0(x) = 0$ genügen. Bestimmen Sie $\Psi_0(x)$ mit Hilfe eines Exponentialansatzes der Form $e^{u(x)}$, wo $u(x)$ irgendeine Funktion ist.

c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenzustände $\Psi_n(x) = \frac{(\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\Psi_0(x)$ mit Hilfe der Hermite-Polynome.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Vorstellen einer Übungsaufgabe im Tutorium.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes.

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 203		EW 203	
10-12					EW 114
12-14		EW 229			
14-16					
16-18				EW 226	

Sprechstunden			
ES	Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD	nach Vereinbarung	EW 735
RB	MSc. Rico Berner	**Di 14-15**	ER 245
JC	Dr. Javier Cerrillo	**Do 13-14**	EW 705
BL	Dr. Benjamin Lingnau	**Mi 13-14**	EW 629