Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
MSc. Rico Berner, Dr. Javier Cerrillo, Dr. Benjamin Lingnau

Projekte zur Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Durchführung

Die Projekte stellen Aufgaben aus aktuellen Forschungsfeldern der Quantenmechanik dar oder dienen zur Ergänzung sowie Vertiefung fortgeschrittener Themen und können nach eigenen Vorstellungen bearbeitet werden (Numerik, Analytik, Zusammenfassung der Literatur . . .). Die in jeder Projektbeschreibung aufgeführten Punkte können als Leitfaden dienen, Sie können aber auch in Absprache mit den BetreuerInnen eigene Ideen verfolgen.
Die Projekte sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist. Bei einigen Projekten werden allerdings besondere Vorkenntnisse benötigt (z.B. Mathematica, Python).
Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung des Projekts in Gruppen von 3-5 Studierenden. Die Projektvergabe erfolgt zufällig, aber unter Beachtung der eigenen Vorlieben.

2. Präsentation der Ergebnisse in einem 15 minütigen Kurzvortrag (+ 5 Minuten Diskussion) in der letzten Vorlesungswoche. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.

3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation der Lösungswege und vollständigen Quellenangaben bis zum 16.02.2018. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen Ihnen die BetreuerInnen des jeweiligen Projektes für Fragen zur Verfügung. Bitte machen Sie individuell Termine mit den Betreuenden aus.

Projekt 1: *Coulomb-Renormierung eines Quantenpunktes im zwei- und dreidimensionalen Halbleiter*

Betreuer: Benjamin Lingnau

In elektronischen Halbleitersystemen spielt die Vielteilchen-Coulombwechselwirkung eine wichtige Rolle. Bei hohen Elektronendichten sowie bei niedrigdimensionalen Quantenstrukturen führt diese zu einer Renormierung der Übergangsenergie, die von der Ladungsträgerdichte im Material abhängt. [1, 2, 3] In diesem Projekt soll die Coulombwechselwirkung eines isolierten Quantenpunktes (*quantum dot*, QD) mit einem ihn umgebenden höherdimensionalen Halbleiterkristall betrachtet werden. Der Quantenpunkt ist eine quasi-nulldimensionale Halbleiterstruktur mit jeweils einem (spin-entarteten) lokalisierten Zustand im Leitungs- und Valenzband. Dazu betrachten wir den Vielteilchenhamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{QD}} + \hat{H}_{\mathrm{kin}} + \hat{H}_C = \sum_{i \in \{c,v\}} \varepsilon_i^{\mathrm{QD}} \hat{a}_i^{\mathrm{QD}\dagger} \hat{a}_i^{\mathrm{QD}} + \sum_{\boldsymbol{k},i} \varepsilon_{k,i} \hat{a}_{\boldsymbol{k},i}^\dagger \hat{a}_{\boldsymbol{k},i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \mu\mu'}} V_{\mu\mu'}^{\lambda\lambda'} \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_{\mu'}^\dagger \hat{a}_\mu \hat{a}_\lambda \,. \quad (1)$$

Hier bezeichnen i die Quantenpunktzustände und $\boldsymbol{k}$ die Zustände des Halbleiterkristalls, jeweils im Valenz- (v) und Leitungsband (c). Die Coulombwechselwirkung ist über ihr Matrixelement definiert:

$$V_{\mu\mu'}^{\lambda\lambda'} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{bg}} \iint \psi_{\lambda'}^*(\boldsymbol{r}_1)\psi_{\mu'}^*(\boldsymbol{r}_2) \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \psi_\lambda(\boldsymbol{r}_1)\psi_\mu(\boldsymbol{r}_2)\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}^n\boldsymbol{r}_2 \,. \quad (2)$$

Die Summen über die Zustände $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ beinhalten hier sowohl die Quantenpunkt- als auch die ausgedehnten Kristallzustände. Die folgenden Punkte sollen im Projekt bearbeitet werden:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Schreiben Sie den Vielteilchenhamiltonian in die Elektron-Lochdarstellung um und ersetzen Sie die Coulombwechselwirkung durch ihre Fourierdarstellung.
- Leiten Sie einen Ausdruck für die Übergangsenergie des Quantenpunktes her, indem Sie die Zeitentwicklung des Nichtdiagonalelements $p_{cv}^{\mathrm{QD}} := \hat{a}_c^{\mathrm{QD}} \hat{d}_v^{\mathrm{QD}}$ in Hartree-Fock-Näherung berechnen. Hier taucht die Coulombwechselwirkung mit dem umgebenden Elektronen auf, die die Übergangsenergie renormiert.
- Werten Sie die renormierte Übergangsenergie im Fall der Wechselwirkung mit zwei- und dreidimensionalen Halbleitern in Abhängigkeit von der Elektronendichte aus. Nehmen Sie z.B. GaAs für das Halbleitermaterial an. Nähern Sie die Elektronenwellenfunktion im Quantenpunkt als Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Oszillators.

Literatur

[1] W. W. Chow and S. W. Koch: *Semiconductor-Laser Fundamentals* (Springer, Berlin, 1999).

[2] H. Haug and S. W. Koch: *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* (World Scientific, Singapore, 2004), 2nd ed.

[3] W. W. Chow and S. W. Koch: *Theory of semiconductor quantum-dot laser dynamics*, IEEE J. Quantum Electron. **41**, 495 (2005).

Projekt 2: *Von den Halbleiter-Blochgleichungen zur Boltzmanngleichung*

Betreuer: Benjamin Lingnau

Es gibt eine Hierarchie von Transportgleichungen zwischen der mikroskopisch-quantenmechanischen und der makroskopisch-klassischen Beschreibungsebene [1]. Ziel dieses Projektes ist es, aus der vollen quantenkinetischen Dichtematrix-Theorie (Halbleiter-Blochgleichungen) die semiklassische Boltzmanngleichung abzuleiten.
Die Wechselwirkung von Ladungsträgern im Halbleiter mit einer klassischen Lichtquelle kann im Rahmen der Dichtematrixtheorie mit den Halbleiter-Blochgleichungen beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} f_{e,h}(k,t) = \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t)[p^*(k,t) - p(k,t)] \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} p(k,t) = \frac{1}{i} \omega_p(k) p(k,t) + \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t)[1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)]\,. \tag{2}$$

Hier sind f_e und f_h die Verteilungsfunktionen der Elektronen und Löcher und p die mikroskopische Polarisation, abhängig von der Zeit t und der Wellenzahl k. Das System koppelt mit dem elektrischen Dipolmatrixelement $\underline{\mu}$ an das externe elektrische Feld $\underline{\mathcal{E}}(t) = \underline{\mathcal{E}}_0(t)e^{i\omega t} + \mathrm{c.c.}$, und ω_p ist die elektronische Übergangsfrequenz.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung (2) mit einer Green'schen Funktion und setzen Sie das Ergebnis

$$p(k,t) = \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_p(t-t')} \frac{1}{i\hbar} \underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}(t') \left[1 - f_e(k,t') - f_h(k,t')\right] dt' \tag{3}$$

  in Gleichung (1) ein. Dadurch eliminieren Sie die Polarisation und erhalten eine geschlossene Integro-Differentialgleichung für f_e und f_h, die schwer zu lösen ist.
- Nehmen Sie nun an, dass sowohl die Amplitude des elektrischen Feldes $\underline{\mathcal{E}}_0(t)$ als auch die Besetzung $f_{e,h}(k,t)$ viel langsamer variieren als die oszillierenden Terme, so dass wir im Argument jeweils t' durch t ersetzen können. Sie erhalten dann

$$\frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{1}{\hbar^2} \left|\underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}_0(t)\right|^2 [1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)] \int_{t_0}^{t} dt' F(t') \tag{4}$$

  mit einer oszillierenden Funktion $F(t)$, d.h. eine lineare Differentialgleichung ohne Gedächnis, da die Werte $\frac{d}{dt} f_{e,h}(k,t)$ nicht mehr von früheren Werten $f_{e,h}(k,t')$, $t' < t$, abhängen (Markov-Näherung).
- Um das verbleibende Integral abzuschätzen, lassen Sie t_0 gegen $-\infty$ streben und benutzen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iE^{\pm}x} = 2\pi\delta(E^{\pm})$ mit $E^{\pm} = E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega$. Gruppieren Sie dabei überall $e^{\pm i(\omega_p - \omega)(t-t')}$ und vernachlässigen Sie dann alle schnell oszillierenden Beiträge mit $e^{\pm 2i\omega t}$ (rotating wave approximation, RWA). Dies führt auf die Übergangsrate nach Fermis Goldener Regel:

$$\frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\underline{\mu} \cdot \underline{\mathcal{E}}_0(t)\right|^2 [1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)] \left[\delta(E^+) + \delta(E_-)\right]. \tag{5}$$

- Wenden Sie dieselbe Prozedur auf Elektron-Phonon-Wechselwirkungen an und leiten Sie die jeweiligen Stoßintegrale der semiklassischen Boltzmanngleichung ab. Diskutieren Sie die Gültigkeitsgrenzen der Boltzmanngleichung.

Literatur

[1] E. Schöll (Editor): *Theory of Transport Properties of Semiconductor Nanostructures*, vol. 4 of *Electronic Materials Series* (Chapman and Hall, London, 1998).

Projekt 3: *Boltzmanngleichung für die Auger-Streuung im Elektronengas*

Betreuer: Benjamin Lingnau

Die Coulombwechselwirkung in Vielelektronensystemen führt nicht nur zu einer Änderung der Elektronenenergie, sondern auch zu Streuprozessen, die im Elektronengas auf langen Zeitskalen eine Gleichgewichtsverteilung erzeugt. Neben der Elektron-Phonon-Streuung ist die Auger-Streuung zwischen den Elektronen in Halbleitern gerade bei hohen Elektronendichten der dominierende Streuprozess. [1, 2, 3]

Wir möchten die Auger-Streuung im wechselwirkenden Elektronengas herleiten und die entsprechende Streurate im Rahmen einer zeitabhängigen Störungstheorie berechnen. Dazu betrachten wir den Hamiltonian eines wechselwirkenden Elektronengases:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{kin}} + \hat{H}_C = \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{q}}} V_q \, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}'} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} \,. \tag{1}$$

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Berechnen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Besetzungsdichte $\rho(\boldsymbol{K}) := \langle \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{K}} \hat{a}_{\boldsymbol{K}} \rangle$ sowie für die dort auftretenden Vierer-Erwartungswerte.
- Die Vierer-Erwartungswerte koppeln wiederum an Erwartungswerte von Sechser-Operatoren, die faktorisiert werden müssen, um das Hierarchieproblem zu umgehen. Die resultierenden quantenkinetischen Gleichungen beschreiben die Coulombwechselwirkung in bis zu zweiter Ordnung. Verifizieren Sie, dass die Coulombwechselwirkung in erster Ordnung die Besetzungsdichten nicht beeinflussen würde.
- Führen Sie die Markov-Näherung für die auftretenden Vierer-Terme durch, diese liefert energieerhaltende δ-Funktionen. Dies liefert die Boltzmanngleichung für die Besetzung $\rho(\boldsymbol{K})$ im Zustand $\boldsymbol{K}$. Interpretieren Sie die auftretenden Terme.
- Nehmen Sie an, dass sich das Elektronengas im thermischen Gleichgewicht befindet. Betrachten Sie nun eine kleine Störung der Besetzung $\delta\rho(\boldsymbol{K})$. Berechnen Sie aus der Boltzmanngleichung die Rate, mit der diese Störung abklingt, der Gleichgewichtszustand also wiederhergestellt wird, und stellen Sie die Rate in Abhängigkeit von der Elektronendichte graphisch dar.

Literatur

[1] E. Schöll: *Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors* (Springer, Berlin, 1987).

[2] E. Schöll (Editor): *Theory of Transport Properties of Semiconductor Nanostructures*, vol. 4 of *Electronic Materials Series* (Chapman and Hall, London, 1998).

[3] E. Malić: *Dynamic Theory of Semiconductor Quantum Dot Lasers (diploma thesis)* (TU Berlin, 2005).

Projekt 4: *Zweiniveausystem in einer optischen Kavität*

Betreuer: Benjamin Lingnau

Das Jaynes-Cumming-Modell (JCM) ist ein grundlegendes Modell der Quantenoptik [1] und beschreibt die verlustfreie Wechselwirkung zwischen einem Zweiniveau-System mit einer einzelnen quantisierten Lichtmode. Trotz der Einfachheit dieses Systems weist es viele interessante Eigenschaften auf, wie z.B. Vakuum-Rabi-splitting oder die berühmte Collapse- and Revival-Dynamik im Falle eines starken Cavity-Feldes im Glauberzustand. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Der JCM-Hamiltonian ist gegeben durch $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{WW}$, mit

$$\hat{H}_0 = \hbar \sum_{i=b,a} \omega_i |i\rangle \langle i| + \hbar\omega\hat{c}^\dagger\hat{c}, \tag{1}$$

$$\hat{H}_{WW} = \hbar g |b\rangle \langle a| \hat{c}^\dagger + H.c. \tag{2}$$

  wobei der Grundzustand des elektronischen Systems konventionellerweise mit b und der angeregte Zustand mit a bezeichnet werden. $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$ ist demnach die Übergangsfrequenz des 2-Niveausystems, ω die Frequenz des optischen Resonators und g die Kopplungsstärke zwischen dem 2-Niveausystem und der Resonatormode. Stellen Sie nun das elektronische und photonische System im ungestörten Fall (also ohne $\hat{H}_{WW}$) schematisch dar.

- Wie oben erwähnt, handelt es sich beim JCM um ein verlustfreies System und damit um ein System im Regime der starken Kopplung. Dies führt zu einer Hybridisierung der beiden Teilsysteme. Bringen Sie also den Hamiltonian auf Diagonalform, bestimmen Sie die neuen Eigenwerte sowie die neuen Systemzustände, die sogenannten *dressed states* [2]. Stellen Sie das wechselwirkende System nun ebenfalls schematisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis. Gehen Sie auf den Begriff des *Mollow-Tripletts* ein.

- Stellen Sie mithilfe von Gleichungen (1) und (2) und der Schrödingergleichung die Koeffizientengleichungen auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingung, dass sich das Elektron im Zustand $|a\rangle$ befindet. Das photonische System befinde sich in einem beliebigen Anfangszustand. Geben Sie hiermit die Lösung für die Inversion des Emitters sowie die Besetzungswahrscheinlichkeit einer beliebigen Anzahl von Photonen an.

- Berechnen Sie die Dynamik nun für verschiedene Lichtstatistiken der Photonmode, und zwar:

  (a) Fock-Zustand
  (b) thermischer Zustand
  (c) kohärenter Zustand

  Werten Sie die Ergebnisse graphisch aus und diskutieren Sie die Dynamik.

Literatur

[1] M. O. Scully: *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).

[2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg: *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH, Weinheim, 2004).

Projekt 5: *Transport through a magnetic molecule*

Betreuer: Lina Jaurigue, Benjamin Lingnau

Spin dependent transport has potential applications in quantum information storage and processing. In this project the spin dependent transport through a magnetic molecule coupled to normal and superconducting leads will be studied. For this we will consider an idealised model for a magnetic molecule which has a single orbital with coupling between the spin of the electron in the orbital level, $\mathbf{s_e}$, to the spin of the rest of the molecule, $\mathbf{S} \in \{\uparrow, \downarrow\}$:

$$H_M = \sum_\sigma \epsilon d_\sigma^\dagger d_\sigma + U n_\uparrow n_\downarrow + J\mathbf{S} \cdot \mathbf{s_e}, \tag{1}$$

where $d_\sigma^\dagger$ and d_σ are the creation and annihilation for electrons with spin $\sigma =\uparrow, \downarrow$ and n_σ is the number operator. The leads are described by the Hamiltonian

$$H_\eta = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k C_{\eta k\sigma}^\dagger C_{\eta k\sigma} - \delta_{\eta,S}\Delta \sum_k \left(C_{\eta -k\downarrow} C_{\eta -k\uparrow} + H.c.\right), \tag{2}$$

where $\eta = N, S$ for the normal and superconducting leads and $C_{\eta k\sigma}^\dagger$ and $C_{\eta k\sigma}$ are the creation and annihilation operators in the leads. The second term in the lead Hamiltonian comes from the BCS mean-field theory for superconductors, where 2Δ is the gap of the quasi-particle density of states in the superconductor. Tunnel coupling between the leads and the magnetic molecule is described by

$$H_{tunn,\eta} = \sum_{k,\sigma} \left(V_\eta C_{\eta k\sigma}^\dagger d_\sigma + H.c\right), \tag{3}$$

where V_η are the tunnel matrix elements, which we will assume to be independent of the wave number k and the spin σ. The effective tunnel rates are $\Gamma_\eta = 2\pi N_\eta |V_\eta|^2$, where N_η is the lead density of states which we assume to be constant in the energy range of interest.

- Familiarise yourselves with BCS mean-field theory for superconductors.
- Show that in the infinite superconducting bandgap limit, $\Delta \to \infty$, the coupling of the magnetic molecule to a superconducting lead can be treated exactly via an effective Hamiltonian given by

$$H_{eff} = H_M - \frac{\Gamma_S}{2}\left(d_\uparrow^\dagger d_\downarrow^\dagger + d_\downarrow d_\uparrow\right). \tag{4}$$

- Using a suitable basis, find the eigenvalues and eigenvectors of the effective Hamiltonian.
- Working in the $\Delta \to \infty$ limit and treating the tunnel coupling to the normal lead as a perturbation, investigate the dependence of the steady state current through the normal lead and the occupation probabilities of the molecule eigenstates as a function of the level position ϵ and the Fermi level of the normal lead μ_N. Use the following parameter values: $\Gamma_S = 0.5U$, $1/k_bT = 50/U$, $\mu_S = 0$ and $J = 0.2U$. What is the influence of the coupling strength to the superconducting lead? What is the influence of the strength of the electron spin and molecular spin coupling?

- Calculate the Josephson current of the molecule coupled to two superconducting leads in the $\Delta \to \infty$ limit for vanishing coupling between the electronic and molecular spins (i.e. the limit in which the molecule reduces to a single level quantum dot). Assume that the coupling strengths for the two superconducting leads are equal, $\Gamma_R = \Gamma_L$.

Literatur

[1] A. V. Rozhkov and D. P. Arovas: *Interacting-impurity josephson junction: Variational wave functions and slave-boson mean-field theory*, Phys. Rev. B **62**, 6687 (2000).

[2] M. Governale, M. Pala, and J. König: *Real-time diagrammatic approach to transport through interacting quantum dots with normal and superconducting leads*, Phys. Rev. B **77**, 134513 (2008).

[3] R. Hussein, L. Jaurigue, M. Governale, and A. Braggio: *Double quantum dot cooper-pair splitter at finite couplings*, Phys. Rev. B **94**, 235134 (2016).

[4] L. Jaurigue: *Superconducting Proximity Effect in Magnetic Molecules*, Master's thesis, Victoria University of Wellington (2013), URL http://hdl.handle.net/10063/2788.

Projekt 6: *Floquet theory and coherent destruction of tunneling*

Betreuer: Sebastian Restrepo, Javier Cerrillo

Periodic time-dependent Hamiltonians are pervasive in physics. Electromagnetic fields in electrical circuits and spectroscopic techniques based on the application of oscillating fields are two common examples of time periodic driving in the classical regime. At the level of quantum physics, response of quantum systems to time periodic driving has been increasingly relevant since the invention of the laser. Quantum systems with explicit time-dependent Hamiltonians enclose a large collection of phenomena that is not accessible with traditional stationary quantum mechanics. Ionization of atoms by exposing them to oscillating fields, selective control of chemical reactions by application of coherent light pulses and coherent destruction of tunneling, where internal tunneling dynamics can be practically hindered completely, are just a few.

In principle, the dynamics of periodic time-dependent quantum systems can be obtained by direct numerical integration of Schrödinger's equation using the time-dependent Hamiltonian but, for high-dimensional systems, this can become quite a demanding task. The study of quantum systems interacting with oscillating fields has therefore successfully relied on Floquet theory, where time dependent problems can be transformed to time-independent ones, thus making the study of problems more efficient and non-perturbative.

The project will focus on understanding the main concepts of Floquet theory and its application to simple quantum systems. The following steps will guide the students throughout the project:

- Familiarize with the basics of Floquet theory using references [1, 2, 3].
- Using Floquet's theorem, find analytically the evolution operator of the system described by the Hamiltonian
$$H_{\mathsf{RWA}}(t) = \frac{\omega_0}{2}\sigma_z + g\left(e^{i\omega_L t}\sigma_- + e^{-i\omega_L t}\sigma_+\right). \tag{1}$$
- Following the supplemental material of [3], use a Floquet-Magnus high frequency expansion to first order in $1/\omega_L$ to obtain the effective Hamiltonian and quasienergies of a system described by
$$H(t) = \omega_0\sigma_z + \frac{g}{2}\cos(\omega_L t)\sigma_z. \tag{2}$$
- Follow Sec. 5.6 in [1] to show that the tunneling probability of a two state system is zero whenever the quasienergies of the previous Hamiltonian are degenerate. This effect is known as coherent destruction of tunneling.

Literatur

[1] P. Hänggi: *Driven Quantum Systems* (1998), URL http://www.physik.uni-augsburg.de/theo1/hanggi/Chapter{_}5.pdf.

[2] M. Grifoni and P. Hänggi: *Driven quantum tunneling*, Phys. Rep. **304**, 229 (1998), URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157398000222.

[3] S. Restrepo, J. Cerrillo, V. M. Bastidas, D. G. Angelakis, and T. Brandes: *Driven Open Quantum Systems and Floquet Stroboscopic Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016).

Projekt 7: *Quantenphasenübergang im Dicke-Model*

Betreuer: Christopher Wächtler, Javier Cerrillo

Das Dicke-Model der Quantenoptik [1] beschreibt das kollektive Verhalten eines Vielteilchensystems, welches mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes wechselwirkt. Neben dem verblüffenden Phänomen der Superradianz, also der kollektiven spontanen Emission von Licht, welches sowohl zeitlich als auch räumlich fokusiert ist, zeigt das System auch kritisches Verhalten [2].
Im thermodynamischen Limes vollzieht das Dicke-Model einen Phasenübergang zweiter Ordnung von einer normalen Phase zu einer superradianten Phase. Phasenübergänge sind eine der bemerkenswertesten Phänomene der Physik: Für einen weiten Bereich von Kontrolparametern wie z.B. die Temperatur besitzt das System quasi die gleichen physikalischen Eigenschaften, welche sich aber drastisch in verschiedenen Phasen unterscheiden können. Neben dem thermischen Phasenübergang besitzt das Dicke-Model auch eine neue Art von Phasenübergang bei verschwindender Temperatur, nämlich einen Quantenphasenübergang [3], welcher alleine durch Quantenfluktuation getrieben ist.
Zusätzlich zeigt das Model sog. Signaturen von Quanten-Chaos: Aufgrund der Linearität der Quantenmechanik exisitiert für Quantensysteme kein direktes Analogon zu chaotischem Verhalten in klassischen Systemen. Dennoch erwartet man für ein quantenmechanisches System mit diesen Signaturen, dass das äquivalente klassiche System chaotisch ist.
In diesem Projekt soll der Quantenphasenübergang sowie die Signaturen von Quanten-Chaos des Dicke-Models näher beleuchtet und verstanden werden. Bearbeiten Sie dazu folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Machen Sie sich vertraut mit dem Dicke-Hamiltonian und seinen Eigenschaften, insbesondere den sog. Dicke-States.
- Mit Hilfe von Ref. [3] führen Sie die Transformationen durch, um das System zu diagonalisieren und berechnen Sie Observablen welche den Phasenübergang veranschaulichen.
- Schließlich erarbeiten Sie die Signaturen von Quanten-Chaos im Modell.

Literatur

[1] R. H. Dicke: *Coherence in spontaneous radiation processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99.

[2] K. Hepp and E. H. Lieb: *Equilibrium statistical mechanics of matter interacting with the quantized radiation field*, Phys. Rev. A **8**, 2517 (1973), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.8.2517.

[3] C. Emary and T. Brandes: *Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model*, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.066203.

Projekt 8: *Die Lindblad-Mastergleichung*

Betreuer: Rico Berner

In den bisherigen Vorlesungen haben wir uns mit der Beschreibung von Ein- und Vielteilchen Systemen auseinandergesetzt, welche für sich abgeschlossene Quantensysteme dargestellten. Eine Schwäche dieser abgeschlossenen Modelle, welche das System als isoliert von der Umwelt annehmen, ist die Vernachlässigung von Effekten, die dem System Energie entziehen oder hinzugeben, sogenannte dissipative Effekte. Um diese Vernachlässigung zu vermeiden soll sich in diesem Projekt mit offenen Quantensystemen beschäftigt werden, welche die Realität in vielen Fällen besser abbilden [1]. Die folgenden Punkte dienen als Leitfaden:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema ausgehend von der gegebenen Literatur durch [2, 3].
- Definieren Sie den Begriff verschränkter Zustände und erläutern Sie den Unterschied zu reinen Zuständen.
- Ausgehend von der Beschreibung im Wechselwirkungs-Bild soll die Mastergleichung in Lindblad-Form hergeleitet werden. Beginnen Sie, indem Sie die Dichteoperator einführen und seine Eigenschaften beschreiben.
- Verallgemeinern Sie den Dichteoperator für eine allgemeine System-Bad-Kopplung und leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Bewegungsgleichung des Dichteoperators her. Was ist der Liouville-Superoperator?
- Durch das Bilden der partiellen Spur des Dichteoperators über die Bad-Zustände wird eine Reduktion des zu lösenden Systems möglich. Beschreiben Sie dieses Vorgehen.
- Führen Sie nun nachfolgend folgende Näherungen ein und beschreiben Sie deren Eigenschaften: Born-, Markov-, Sekularnäherung. Finden Sie damit den Ausdruck der Mastergleichung in Lindblad-Form.
- Beschreiben Sie als Anwendung einen Quanten-van-der-Pol-Oszillator. Leiten Sie die Mastergleichung für einen solchen her [4, 5].

Literatur

[1] H.-P. Breuer and F. Petruccione: *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2002).

[2] G. Schaller: *Non-equilibrium master equation*, Tech. rep., TU Berlin (2015).

[3] T. Brandes: *Quantensysteme im nichtgleichgewicht: Einführung*, Tech. rep., TU Berlin (2016).

[4] T. E. Lee and H. R. Sadeghpour: *Quantum Synchronization of Quantum van der Pol Oscillators with Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **111**, 234101 (2013).

[5] E. Schöll, S. H. L. Klapp, and P. Hövel: *Control of self-organizing nonlinear systems* (Springer, Berlin, 2016).

Projekt 9: *Dunkelzustand-Laserkühlung von gefangenen Ionen*

Betreuer: Javier Cerrillo

Quantenkomputation benötigt Systeme die unter Kontrolle in das Quantenregime gebracht werden können. Bei Implementationen mit gefangenen Ionen [1] ist es nötig die Temperatur zu verringern, indem man mit Laserstrahlung die Ionenbewegung beeinflusst. Das Verfahren ist als Laserkühlung bekannt [2]. Elektronische Überlagerungszustände können benutzt werden um den Grundzustand des Ions zu erreichen [3, 4, 5].

Ein realistischer Hamilton-Operator für ein mit einem Laserfeld wechselwirkendes drei-Niveau-System in einer Dimension ist

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \omega_2 |2\rangle\langle 2| + \omega_e |e\rangle\langle e| + \nu b^\dagger b \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\Omega_1 \cos(\omega_{L1}t - k_{L1}x)|1\rangle\langle e| + \Omega_2 \cos(\omega_{L2}t - k_{L2}x)|2\rangle\langle e| + H.c.\Big], \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde, $|i\rangle$ mit $i \in \{1,2,e\}$ die jeweiligen elektronischen Zustände sind, ω_i die assoziierten Energien, $b^\dagger$ der erzeugende Operator und x die Position des Ions in einer harmonischen Falle der Frequenz ν. Symbole Ω_j, ω_{Lj} und k_{Lj} mit $j \in \{1,2\}$ sind jeweils die Rabi-Frequenz, die Laser-Frequenz und die Laser-Wellenzahl.

- Finde ein Bild zur Anwendung der Rotating Wave Approximation (RWA), damit der Hamilton-Operator zeitunabhängig wird.
- Zeige, dass im Limes großer Laser-Wellenlänge und niedriger Temperatur (Lamb-Dicke-Limes) der Hamilton-Operator Gl.(1) als

$$\begin{aligned} H &= \Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \Delta_2 |2\rangle\langle 2| + \nu b^\dagger b + \frac{1}{2}(\Omega_1 |1\rangle\langle e| + \Omega_2 |2\rangle\langle e| + H.c.) \\ &+ \frac{1}{2}\left[i\eta_1\Omega_1 |1\rangle\langle e|\left(b^\dagger + b\right) + i\eta_2\Omega_2 |2\rangle\langle e|\left(b^\dagger + b\right) + H.c.\right], \end{aligned} \tag{2}$$

  gegeben ist. Bestimme die Verstimmungen Δ_j und die Lamb-Dicke-Parameter η_j, wobei $j \in \{1,2\}$.
- Die spontane Emission des erregten Zuständes $|e\rangle$ lässt sich mittels einer Master-Gleichung [2] modellieren. Unter der Annahme, dass optische Frequenzen der Umgebung nicht besetzt sind, finde eine passende Master-Gleichung für dieses 3-Niveau-System.
- Für $\Delta_1 = \Delta_2$ und $\eta_j \to 0$ lässt sich das elektronische System Gl.(2) zu einem effektiven 2-Niveau-System vereinfachen, indem man einen Dunkel-Zustand definiert. Finde die dazugehörigen Bloch-Gleichungen. Welcher ist der elektronische Langzeitzustand?
- Leite eine Mastergleichung für den Bewegungsfreiheitsgrad her

$$\begin{aligned} \dot\rho &= (\mathcal{L}_0 + \mathcal{J}_- + \mathcal{J}_+)\rho = -i[\nu b^\dagger b, \rho] - \frac{A_-}{2}\left(b^\dagger b\rho + \rho b^\dagger b - 2b\rho b^\dagger\right) \\ &- \frac{A_+}{2}\left(bb^\dagger\rho + \rho bb^\dagger - 2b^\dagger\rho b\right), \end{aligned} \tag{3}$$

  und berechne die Raten A_- und A_+ mit Hilfe des Quanten-Regressions-Theorems.

- Drücke die mittlere Besetzungszahl für lange Zeiten $\langle n \rangle (t \to \infty)$ und die Kühlungsrate als Funktion der Raten A_- und A_+ aus. Optimiere diese als Funktion von den Verstimmungen und den Rabi-Frequenzen.

- Simuliere die Mastergleichung des ganzen Systems und bestimme, in welchen Situationen die Mastergleichung Gl.(3) ungültig ist, sei es wegen der Verletzung der Bornschen oder der Markovschen Näherung.

Literatur

[1] D. J. Wineland: *Superposition, entanglement, and raising Schrödinger's cat*, Rev. Mod. Phys. **85**, 1103 (2013).

[2] J. I. Cirac, R. Blatt, P. Zoller, and W. D. Phillips: *Laser cooling of trapped ions in a standing wave*, Phys. Rev. A **46**, 2668 (1992), URL http://pra.aps.org/abstract/PRA/v46/i5/p2668_1.

[3] G. Morigi, J. Eschner, and C. Keitel: *Ground state laser cooling using electromagnetically induced transparency*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4458 (2000), URL http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11082570.

[4] J. Cerrillo, A. Retzker, and M. B. Plenio: *Fast and Robust Laser Cooling of Trapped Systems*, Phys. Rev. Lett. **104**, 043003 (2010), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.043003.

[5] N. Scharnhorst, J. Cerrillo, J. Kramer, I. D. Leroux, J. B. Wübbena, A. Retzker, and P. O. Schmidt: *Experimental and theoretical comparison of the cooling performance between standard and double-bright EIT cooling* (2017), URL http://arxiv.org/abs/1711.00732.

Projekt 10: *Zählstatistik des Dicke-Phasenübergangs*

Betreuer: Christopher Wächtler, Javier Cerrillo

Das Dicke-Modell der Quantenoptik [1] beschreibt die Wechselwirkung von N Zwei-Niveau-Systemen mit einer bosonischen Mode. Im thermodynamischen Limes ($N \to \infty$) vollzieht das System einen Quantenphasenübergang von einer normalen zu einer superradianten Phase, wenn die Kopplung zwischen den Atomen und der Lichtmode einen kritischen Wert übersteigt [2]. Das Modell wurde im Experiment getestet und der Phasenübergang beobachtet [3].
Da im Experiment Verluste durch die Kavität nicht zu verhindern sind, existieren theoretische Ansätze, welche die Interaktion mit der Umwelt modellieren. Eine dieser Methoden besteht darin, die Dynamik des Systems mit einer Lindblad-Mastergleichung zu beschreiben. Zusätzlich bietet der Formalismus der sog. Full Counting Statistics [4] die Möglichkeit, die statistischen Eigenschaften der Photonen zu studieren [5].
In diesem Projekt soll sich mit dem Formalismus von Lindblad-Mastergleichungen und Full Counting Statistics in Bezug auf das Dicke-Modell auseinandergesetzt werden und der Einfluss des Quantenphasenübergangs im geschlossenen System auf die Statistik der Photonen untersucht werden.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Machen Sie sich vertraut mit dem Dicke-Hamiltonian und seinen Eigenschaften, insbesondere den sog. Dicke-States.
- Mit Hilfe von Ref. [5] soll zunächst der thermodynamische Limes untersucht werden. Weiterhin soll die Mastergleichung mit Zählfeld in die P-Repräsentation gebracht werden und verschiedene Momente der Photonenzahl untersucht werden.

Literatur

[1] R. H. Dicke: *Coherence in spontaneous radiation processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99.

[2] C. Emary and T. Brandes: *Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model*, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.066203.

[3] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger: *Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity*, Nature **464**, 1301 (2010), URL http://dx.doi.org/10.1038/nature09009.

[4] G. Schaller: *Open Quantum Systems Far from Equilibrium* (Lect. Notes Phys., Springer, Cham, 2014).

[5] W. Kopylov, C. Emary, and T. Brandes: *Counting statistics of the Dicke superradiance phase transition*, Physical Review A **87**, 043840 (2013).

Projekt 11: *Maxwell-Dämon in quantenmechanischen Transportsystemen*

Betreuer: Javier Cerrillo

Der Maxwell'sche Dämon ist ein Gedankenexperiment des schottischen Physikers James Clerk Maxwell (1831–1879) zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Solch ein Dämon kann als versteckter idealisierter Mechanimus verstanden werden, der die Entropiebilanz eines thermodynamischen Gleichgewichts-Systems manipuliert, ohne dabei die Energiebilanz zu verändern. Mittels eines Einzelelektronentransistors, welcher an einen Quantenpunktkontakt gekoppelt ist, wird in [1, 2] gezeigt, dass sowohl der Zustand des Transistors gemessen werden als auch mittels geeigneter Rückkopplung ein (makroskopischer) Strom entgegen der Potentialdifferenz fließen kann. Dies verletzt die traditionelle Form des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und stellt eine konkrete Realisierung eines Maxwell'schen Dämons dar. Trotz dieser scheinbaren Verletzung ist es möglich, dieses System konsistent thermodynamisch zu interpretieren, mittels stochastischer Thermodynamik [3], wenn man den Einfluss der Rückkopplungskontrolle berücksichtigt.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Erarbeiten Sie, wie die Quantenmechnik für stark wechselwirkende Systeme mittels Mastergleichungen beschrieben werden kann [4, 5].
- Zeigen Sie explizit anhand eines Ein-Niveausystems, wie die Raten bestimmt werden und wie man die Dynamik der Zustände in der Matrixdarstellung formuliert.
- Prüfen Sie die Annahmen in der Publikation [1] und diskutieren Sie Stärken und Schwächen dieser Herangehensweise. Vergleichen Sie mit [2].
- Diskutieren Sie die abschließende Aussage der Autoren: "Ein System, welches einem Maxwell'schen Dämon ausgesetzt ist, stellt nur eine Idealisierung dar, in welcher die Dissipation durch die Ankopplung des Dämons selber vernachlässigt wird".

Literatur

[1] P. Strasberg, G. Schaller, T. Brandes, and M. Esposito: *Thermodynamics of a physical model implementing a maxwell demon*, Phys. Rev. Lett. **110**, 040601 (2013), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.040601.

[2] G. Schaller, J. Cerrillo, G. Engelhardt, and P. Strasberg: *An electronic Maxwell demon in the coherent strong-coupling regime* (2017), URL http://arxiv.org/abs/1711.00706.

[3] M. Esposito: *Stochastic thermodynamics under coarse graining*, Phys. Rev. E **85**, 041125 (2012), URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.041125.

[4] T. Brandes: *Skript: Quantensysteme im nichtgleichgewicht: Einführung* (2016).

[5] G. Schaller: *Open Quantum Systems Far from Equilibrium* (Lect. Notes Phys., Springer, Cham, 2014).

Projekt 12: *Non-Markovianity and information backflow*

Betreuer: Sebastian Restrepo, Javier Cerrillo

One of the biggest challenges for the implementation of quantum technologies is that quantum systems are never isolated. They are always interacting with the external world, exchanging energy or matter. Such quantum systems are considered as open. Since all experimentally relevant quantum systems are open, a general theory of open quantum systems is of great interest in research. Examples of such systems are the interaction of matter with light or the one-dimensional movement of a particle interacting with an environment described by harmonic oscillators in thermal equilibrium, also known as quantum Brownian motion.

One of the first and most successful approaches to the theory of open quantum systems was the study of Markovian master equations [1, 2]. In this approach the dynamics of the system is assumed to be memoryless and therefore called Markovian. While Markovian approaches are suitable for a broad class of systems, they are usually restricted to fast environment dynamics, where the correlations between system and environment are lost extremely quickly.

We will be interested in non-Markovian systems. A significant feature of non-Markovian evolution is the possibility of presenting revivals of energy or/and information that, for short periods of time, can prolong the quantum properties of the system fighting against the effect of the surroundings. The project will focus on quantifying non-Markovianity as the information back-flow between system and environment. The following points will guide students throughout the project:

- Familiarize with the concept of trace distance, indistinguishably and contraction by following Sec. 9.2 in [3].
- Following reference [4], focus only on the BLP measure [2] and quantify the back-flow of information for the single qubit pure dephasing model as a function of the Ohmicity parameter s.
- Study the spontaneous decay of a two level system (amplitude damping channel) in [1] and obtain is master equation.
- Quantify the non-Markovianity of the previous model for a Lorentzian spectral density following [4]. Note that this model is also referred to as the resonant Jaynes-Cummings model.

Literatur

[1] F. Petruccione and H. H.-P. Breuer: *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2007), URL http://www.oxfordscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001/acprof-9780199213900.

[2] H. P. Breuer, E. M. Laine, and J. Piilo: *Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems*, Phys. Rev. Lett. **103**, 1 (2009).

[3] *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (2011), URL http://www.amazon.com/Quantum-Computation-Information-10th-Anniversary/dp/1107002176.

[4] C. Addis, B. Bylicka, D. Chruściński, and S. Maniscalco: *Comparative study of non-Markovianity measures in exactly solvable one- and two-qubit models*, Phys. Rev. A **90**, 052103 (2014), URL http://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.90.052103.

Projekt 13: *Zeitverzögerte Rückkopplung zur Kontrolle von Quantensystemen*

Betreuer: Wassilij Kopylov, Javier Cerrillo

Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle ist eine etablierte Methode zur Steuerung klassischer nichtlinearer Systeme [1]. Beispielsweise lassen sich die unterschiedlichen instabilen periodischen Orbits eines chaotischen Systems stabilisieren, wenn die Verzögerungszeit gleich der zeitlichen Periode des instabilen Orbits gewählt wird. Die Stabilität von Fixpunkten lässt sich zudem umkehren und neue stabile Grenzzyklen können generiert werden. Die Implementation dieser Kontrolle auf quantenmechanische Systeme ist ein junges Feld. Das in der Quantenmechanik zur Modellierung von Superradianz verwendete dissipative Dicke-Model lässt sich durch semiklassische dynamische Gleichungen beschreiben, wodurch es zum idealen Kandidaten wird, um den Einfluss von zeitverzögerter Rückkopplung zu untersuchen. Es wurde kürzlich gezeigt, dass die Rückkopplung neue stationäre und oszillierende Nichtgleichgewichtsphasen erzeugen kann [2].
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.
- Arbeiten Sie sich in die Theorie der Pyragas-Kontrolle ein und stellen Sie diese am Beispiel eines klassischen nichtlinearen Problems vor.
- Vollziehen Sie die Rechnungen in [2] nach. Erklären Sie das Auftreten von Fixpunkten und Grenzzyklen. Unter welchen Bedingungen lässt sich das vorgestellte Kontrollschema anwenden?

Literatur

[1] E. Schöll and H. G. Schuster (Editors): *Handbook of Chaos Control* (Wiley-VCH, Weinheim, 2008), second completely revised and enlarged edition.

[2] W. Kopylov, C. Emary, E. Schöll, and T. Brandes: *Time-delayed feedback control of the Dicke-Hepp-Lieb superradiant quantum phase transition*, New J. Phys. **17**, 013040 (2015).

Projekt 14: *Wiseman-Milburn-Rückkopplungskontrolle im Quantentransport*

Betreuer: Wassilij Kopylov, Javier Cerrillo

Die Kontrolle eines Systems mithilfe der Rückkopplung ist ein wichtiger Pfeiler in unserer heutigen Welt. Diese geschieht jedoch für viele im Verborgenen. Die Hauptidee ist dabei auf ein System entsprechend seines Zustandes einzuwirken, um einen gewünschten Effekt zu erzielen. Ein klassisches Beispiel ist die Lüfterkontrolle in einem Notebook, je nach dem, wie heiß das betreffende Bauteil ist, dreht sich der Lüfter schneller oder langsamer. Diese Idee der Rückkopplungskontrolle hat sich als sehr wirkungsvoll erwiesen und wird in verschiedensten Bereichen angewand so z.B. bei der Kontrolle der Laseremissionseigenschaften, Chaoskontrolle etc. Auch in der Quantenphysik ist man daran interessiert, ein System in einem bestimmten Zustand zu halten, um z.B. den Einfluss der Umgebung auszugleichen, oder einen bestimmten Zustand schneller zu erreichen. Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir die Wirkung einer besonderen Form der Rückkopplungskontrolle, die sogenannte Wiseman-Milburn-Kontrolle, in einem quantenmechanischen System betrachten. Das System besteht aus einem Doppel-Quantenpunkt, der von links und von rechts an zwei Teilchenbäder gekoppelt ist. Den Zustand des Doppel-QUantenpunkts beschreiben wir mithilfe der Dichtematrix-Gleichung,

$$\dot{\rho} = \mathcal{W}\rho = (\mathcal{W}_0 + \mathcal{J}_L + \mathcal{J}_R)\rho$$

mit $\mathcal{J}_\alpha = \Gamma_\alpha D_\alpha^\dagger \rho D_\alpha$, $\mathcal{W}_0\rho = -i[H_{eff}, \rho]$ und $H_{eff} = H_S - i\frac{1}{2}\sum_\alpha \Gamma_\alpha D_\alpha^\dagger D_\alpha$. Das ist also die Gl. (1) in Ref. [1]

1. Vorbereitung

   (a) Zeigen Sie, ausgehend von Gl. (1) und Gl. (2) in Ref. [1], dass die Mastergleichung $\dot{\rho}$ in folgender Form geschrieben werden kann:

   $$\dot{\rho} = -i[H_S, \rho] + \Gamma_R/2\,\mathcal{D}[D_R]\rho + \Gamma_L/2\,\mathcal{D}[D_L]\rho.$$

   Wie sind $\mathcal{D}[D_{R/L}]\rho$ definiert?

   (b) Interpretieren Sie die Bedeutung einzelner Terme in der Mastergleichung.

   (c) Zeigen Sie, dass die Mastergleichung formal folgende Lösung hat,

   $$\rho(t) = e^{\mathcal{W}_0 t}\rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t dt_n ... \int_0^{t_2} dt_2 e^{\mathcal{W}_0(t-t_n)}\mathcal{J}e^{(\mathcal{W}_0(t_n-t_{n-1}))}\mathcal{J}\cdot ... \cdot e^{\mathcal{W}_0 t_1}\rho(0)\,,$$

   und interpretieren Sie die einzelnen Terme. Orientieren Sie sich dazu an der Ref. [2].

   (d) Erklären Sie nun, wie man damit die Wiseman-Milburn-Kontrolle einführen kann. Nutzen Sie ggf. Ref. [3]

   (e) Wie kann man nun damit einen Eigenzustand vom effektiven Hamiltonian stabilisieren, warum funktioniert das? Was sind rechte und linke Eigenvektoren, welche Eigenschaften haben sie? (Part C in [1], siehe auch [3]).

2. Anwendung: Wir nehmen nun an: $H_S = T_c\sigma_x$, $D_L^\dagger = |L\rangle\langle 0|, D_R^\dagger = |0\rangle\langle R|$ (siehe Kapitel (III) in Ref. [1]) und die Kontrolle sei eine Qubit-Rotation $C_L = e^{\theta_C \boldsymbol{n_0}\boldsymbol{\Sigma}}$.

(a) Was beschreibt das System?

(b) Untersuchen Sie die Dynamik von H_S.

(c) Untersuchen Sie die Dynamik von diesem System ohne Kontrolle.

(d) Vollziehen Sie nun die Rechnungen in Kapitell (III A) nach und erzeugen Sie mit Ihrer Simulation die Abbildung 2. und 3. Was bewirkt das Feedback?

Literatur

[1] C. Pöltl, C. Emary, and T. Brandes: *Feedback stabilization of pure states in quantum transport*, Phys. Rev. B **84**, 085302 (2011), URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.085302.

[2] T. Brandes: *Skript: Quantensysteme im nichtgleichgewicht: Einführung* (2016).

[3] G. Kießlich, C. Emary, G. Schaller, and T. Brandes: *Reverse quantum state engineering using electronic feedback loops*, New Journal of Physics **14**, 123036 (2012).

Projekt 15: *Quantensignaturen von Chimären-Zuständen*

Betreuer: Rico Berner

Klassische Chimera-Zustände existieren auf Netzwerken identischer Oszillatoren mit nichtlokaler Kopplung und sind durch die räumliche Koexistenz von Bereichen mit kohärenten (synchronisierten) und inkohärenten (desynchronisierten) Oszillatoren charakterisiert [1, 2, 3]. Während ursprünglich nur die Phasendynamik betrachtet wurde, wurden in neuester Zeit auch weitere Formen von Chimera-Zuständen gefunden und untersucht [4]. Chimären-Zustände wurden erst vor wenigen Jahren experimentell in unterschiedlichen physikalischen und chemischen Systemen gefunden [5, 6].
In diesem Projekt soll ein Quanten-Netzwerk N gekoppelter van-der-Pol-Oszillatoren betrachtet werden. Es zeigt sich, dass ausgehend von den klassischen Trajektorien, Chimären-Zustände auch im quantenmechanischen Regime Ihre Spuren hinterlassen [7, 8, 9]. Diese Spuren sollen aufgezeigt und diskutiert werden. Bearbeiten Sie hierzu die folgenden Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema mit der angegebenen Literatur und den in ihnen enthaltenen weiterführenden Referenzen durch.

- Führen Sie ausgehend von der Beschreibung eines Quanten-von-der-Pol-Oszillators die Mastergleichung für ein Netzwerk nicht-lokal gekoppelter Quanten-von-der-Pol-Oszillatoren ein.

- Über einen Molekularfeldansatz kann halb-klassisch eine Differentialgleichung für das Molekularfeld $\alpha(t)$ und eine Mastergleichung für die bosonischen Operatoren der Quanten-Fluktuationen $\tilde{a} = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))$ gefunden werden. Leiten Sie die Gleichung (1) für $\alpha(t)$ her. Beschreiben Sie die Dynamik für das Molekularfeld und zeigen Sie die Existenz klassischer Chimären-Zustände.

$$\dot{\alpha_l}(t) = \alpha_l(t)\left(\kappa_1 - 2\kappa_2|\alpha(t)|^2\right) - \mathrm{i}\frac{V}{2d}\sum_{\substack{m=l-d \\ m\neq l}}^{l+d} \alpha_m(t). \tag{1}$$

- Leiten Sie nun ebenfalls die Mastergleichung (2) für den Dichteoperator der Quantenfluktuationen ρ_α her und analysieren Sie diese. Lösen Sie dafür zunächst die Mastergleichung numerisch.

$$\dot{\rho}_\alpha(t) \approx -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}_Q^{(\alpha)}, \rho_\alpha\right] + 2\sum_{l=1}^{N}\left[\kappa_1\mathcal{D}(\tilde{\alpha}_l^\dagger) + 4\kappa_2|\alpha(t)|^2\mathcal{D}(\tilde{\alpha}_l\right]. \tag{2}$$

- Im Anschluss kann durch Einführung der Wigner-Darstellung für den Dichteoperator auch ein analytischer Zugang über einen Fokker-Planck-Ansatz gefunden werden. Beschreiben Sie diesen Zugang und diskutieren Sie die Lösung. Welches Verhalten zeigt sich für die Korrelationsmatrizen in Abhängigkeit von der klassischen Trajektorie?

- Diskutieren Sie wie sich die Spuren der klassischen Chimären-Zustände in den Quantenfluktuation wiederfinden lassen.

Literatur

[1] Y. Kuramoto and D. Battogtokh: *Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators.*, Nonlin. Phen. in Complex Sys. **5**, 380 (2002).

[2] D. M. Abrams and S. H. Strogatz: *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).

[3] M. J. Panaggio and D. M. Abrams: *Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators*, Nonlinearity **28**, R67 (2015).

[4] A. Zakharova, M. Kapeller, and E. Schöll: *Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks*, Phys. Rev. Lett. **112**, 154101 (2014).

[5] A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll: *Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices*, Nature Phys. **8**, 658 (2012).

[6] M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter: *Chimera and phase cluster states in populations of coupled chemical oscillators*, Nature Phys. **8**, 662 (2012).

[7] T. E. Lee and H. R. Sadeghpour: *Quantum Synchronization of Quantum van der Pol Oscillators with Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **111**, 234101 (2013).

[8] V. Bastidas, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, and T. Brandes: *Quantum signatures of chimera states*, Phys. Rev. E **92**, 062924 (2015).

[9] V. M. Bastidas, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, and T. Brandes: *Chimera states in quantum mechanics*, in *Control of Self-Organizing Nonlinear Systems*, edited by E. Schöll, S. H. L. Klapp, and P. Hövel (Springer, Berlin, Heidelberg, 2016).

Projekt 16: *Rotationssymmetrie und Drehimpuls in der Quantenmechanik*

Betreuer: Rico Berner

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik, angefangen bei der klassischen analytischen Mechanik, in deren Rahmen das universelle Theorem von Noether jede Symmetrie in einer Bewegungsgleichung mit einer Erhaltungsgröße veknüpft, bis zu den modernen Versuchen, die Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu vereinigen.
In diesem Projekt soll es nun darum gehen, die Verbindung zwischen Rotationssymmetrie und dem quantenmechanischen Drehimpuls zu verdeutlichen.
Die folgenden Punkte dienen als Leitfaden:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch. Als Einführungen sind zwei Bücher in der Literatur gegeben [1, 2].
- Was ist eine irreduzible Darstellung der Rotationsgruppe $SO(3)$?
- Finden Sie allgemeine Matrixdarstellungen des Drehimpulses und veranschaulichen Sie das ganze für Spin 1/2, Spin 3/2 und Spin 1.
- Was sind Clebsch-Gordon-Koeffizienten und wie kann man Sie berechnen?
- Finden bzw. konstruieren Sie anschauliche Beispiele.

Literatur

[1] W. Greiner and B. Müller: *Quantum Mechanics: Symmetries* (Springer-Verlag, 1989).

[2] S. Scherer: *Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik* (Springer-Verlag, 2016).

Projekt 17: *Zur Quantisierung von Eichfeldtheorien*

Betreuer: Rico Berner

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik, angefangen bei der klassischen analytischen Mechanik, in deren Rahmen das universelle Theorem von Noether jede Symmetrie in einer Bewegungsgleichung mit einer Erhaltungsgröße veknüpft, bis zu den modernen Versuchen, die Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu vereinigen.
In der modernen Physik spielt vor allem Eichsymmetrien eine tragende Rolle. Das Studium dieser speziellen Symmetrien ermöglichte eine vereinheitlichte Theorie der Elementarteilchen, das Standardmodell. Auf Grund ihrer geometrischen Natur sind Eichfeldtheorien vielstudierte Objekte hinsichtlich der Vereeinigung aller Grundkräfte geworden. In diesem Projekt wollen wir am Beispiel der Maxwellschen Elektrodynamik die Ideen der Eichfeldtheorie einführen und uns mit den Problemen bei der Quantisierung solcher Theorien befassen [1]. Die folgenden Punkte dienen als Leitfaden (die Optionen dienen als Vertiefung über das Projekt hinaus und müssen nicht gewählt werden):

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch. In der Literatur finden Sie einige Lehrbücher um sich mit dem Thema vertraut zu machen [2, 3, 4, 5].
- Was ist eine Eichtheorie?
- Leiten Sie aus dem Prinzip der Eichinvarianz die Lagrangefunktion der Quantenelektrodynamik her. Führen Sie hierfür den Begriff der kovarianten Ableitung ein.
- Wie kann die Eichfreiheit in die Quantenwelt überführt werden? Nutzen Sie den Weg der kanonischen Quantisierung und beschreiben Sie zunächst die Zwangsbedingungen, die bei der Legendre-Transformation der Maxwellschen Theorie im Vakuum auftreten. Diskutieren Sie einen Weg, wie diese Nebenbedingungen aus der klassischen Theorie in die Quantentheorie überführt werden können [6, 7, 8].
- Optional: Die klassische Elektrodynamik ist beschriben als eine $U(1)$-Eichtheorie. Was unterscheidet diese von nicht-abelschen Eichtheorien wie sie zum Beispiel bei Beschreibung der starken Wechselwirkung mit Eichgruppe $SU(3)$ vorkommt.
- Optional: Beschreiben Sie den den üblichen Weg der Quantisierung mittels Eichfixierung. Vergleichen Sie diesen mit anderen Methoden (Kanonische Quantisierung, BRST-Quantisierung, Pfadintegralmethode).

Literatur

[1] R. Mills: *Gauge fields*, American Journal of Physics **57**, 493 (1989).

[2] T. Kugo: *Eichfeldtheorie* (Springer-Verlag, 1997).

[3] M. E. Peskin and D. V. Schröder: *An introduction to quantum field theory* (Cambridge, Mass : Perseus Books, 1995).

[4] M. A. Srednicki: *Quantum field theory* (Cambridge University Press, 2007).

[5] S. Scherer: *Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik* (Springer-Verlag, 2016).

[6] P. A. M. Dirac: *Lectures on quantum mechanics* (New York : Yeshiva Univ., 1967).

[7] K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

[8] M. Henneaux and C. Teitelboim: *Quantization of Gauge systems* (Princeton University Press, 1992).