Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 16. Dezember 2019

Prof. Dr. Kathy Lüdge
Alexander Kraft, Leonhard Schülen, Thomas Martynec, Jonah Friederich, Isaac Tesfaye

10. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 15.01.2020 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 27 (7 Punkte): KRAMERS-KRONIG-*Relationen*

Das Absorptionsverhalten eines Materials sei durch den Imaginärteil der komplexen dielektrischen Funktion gegeben als

(a) $\epsilon''(\omega) = \sin\omega$,

(b) $\epsilon''(\omega) = \Theta(\omega - \omega_1) - \Theta(\omega - \omega_2)$, mit $\omega_1 < \omega_2$.

Hierbei ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion. Berechnen Sie mit Hilfe der KRAMERS-KRONIG-Relation

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{\omega}\, \frac{\epsilon''(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega}$$

($\mathcal{P}\int$ bezeichnet den Hauptwert des Integrals) den Realteil der dielektrischen Funktion. Stellen Sie anschließend $\epsilon'(\omega)$ und $\epsilon''(\omega)$ als Funktion von ω graphisch dar.

Hinweise:

- Führen Sie das Hauptwertintegral auf ein Integral der Form

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

  zurück, und verwenden Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin(cx)}{x} = \frac{\pi\,\mathrm{sgn}(c)}{2}.$$

- Unterscheiden Sie in (b) die drei Fälle $\omega < \omega_1$, $\omega_1 < \omega < \omega_2$, und $\omega_2 < \omega$ zur Auswertung der auftretenden Integrale.

Aufgabe 28 (13 Punkte): *Materialgleichungen mit linearer Antwortfunktion, Suszeptibilität*

(a) Für die Fourierkomponenten des elektrischen Feldes $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und der Polarisation $\underline{P}(\underline{r}, t)$,

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \hat{\underline{E}}(\underline{r}, \omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

gelte mit frequenzabhängiger Suszeptibilität $\hat{\chi}(\omega)$ die lineare Relation

$$\hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) = \hat{\chi}(\omega)\hat{\underline{E}}(\underline{r}, \omega).$$

Leiten Sie daraus die Materialgleichung mit „Gedächtnis“

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \chi(\tau)\underline{E}(\underline{r}, t - \tau)$$

her, wobei

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \hat{\chi}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

(b) Berechnen Sie $\chi(\tau)$ für ein einfaches Materiemodell, in dem die Elektronen der folgenden gedämpften Oszillatorgleichung gehorchen:

$$m\left(\ddot{\underline{x}} + \gamma\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x}\right) = e\,\underline{E}(\underline{r}, t)$$

Bestimmen Sie dazu zuerst das induzierte Dipolmoment eines Elektrons $\underline{p} = e\,\underline{x}(\underline{r}, t)$ für eine harmonische (monochromatische) Welle $\underline{E}(\underline{r}, t) = \hat{\underline{E}}(\underline{r}, \omega)\exp(-i\omega t)$ und daraus die Polarisation $\underline{P}(\underline{r}, t) = \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega)\exp(-i\omega t) = n\,\underline{p}$ (mit n: Elektronenkonzentration) sowie $\hat{\chi}(\omega)$. Durch Fouriertransformation erhalten Sie $\chi(\tau)$.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  Ab dem zweiten Übungsblatt werden Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert. Einzelabgaben werden generell nicht akzeptiert. Zur Vermittlung benutzt bitte die eingerichtete Gruppenbörse am EW 060.
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Kathy Lüdge	Fr, 10:15-11:15	EW 741
Alexander Kraft	Mi, 15:00-16:00	EW 269
Leonhard Schülen	Do, 10:00-11:00	ER 242
Thomas Martynec	Mo, 14:00-15:00	EW 279
Jonah Friederich	Di, 10:00-11:00	EW 060
Isaac Tesfaye	Do, 15:00-16:00	EW 060