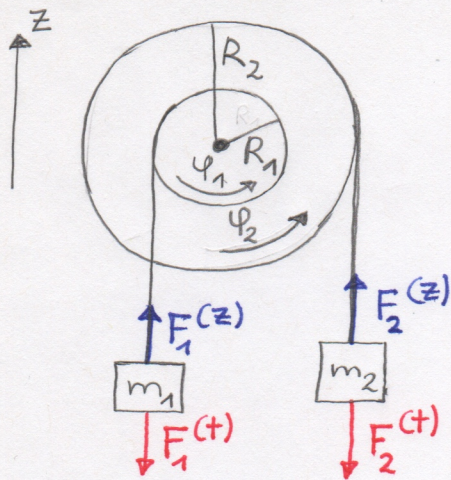


• Bsp: Seilmaschine von Atwood



- 2 Scheiben fest mit einander verbunden

- Annahme: Seile, Räder sind masselos

$$\rightarrow F_1^{(+)} = -m_1 g, F_2^{(+)} = -m_2 g$$

- Zwangskräfte: $F_1^{(z)}, F_2^{(z)}$
[wirken im Seil & übertrifft auf m_1]

- System mit 1 Freiheitsgrad

holonome, skleronome Zwangsbedingung:

$$s\varphi_1 - s\varphi_2 = 0 \rightarrow \frac{1}{R_1} s z_1 + \frac{1}{R_2} s z_2 = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_1} \ddot{z}_1 + \frac{1}{R_2} \ddot{z}_2 = 0 \quad (2)$$

$$\underbrace{\ddot{\phi}_1^{(1)}}_{\phi_1^{(1)}} \quad \underbrace{\ddot{\phi}_2^{(1)}}_{\phi_2^{(1)}} \quad [\text{s. (12.20)}]$$

- Lagrangesche Gln. 1. Art:

$$(12.19) \rightarrow -m_1 \ddot{z}_1 + F_1^{(+)} + \lambda_1 \frac{1}{R_1} = 0 \quad (3)$$

$$-m_2 \ddot{z}_2 + F_2^{(+)} + \lambda_1 \frac{1}{R_2} = 0 \quad (4)$$

(2), (3), (4) gekoppelte DGLn. für z_1, z_2, λ_1

- Lösung: (3) $\xrightarrow{F_1^{(+)} = -m_1 g}$ $\lambda_1 = R_1 (m_1 \ddot{z}_1 + m_1 g) \quad (5)$

(2) & (5) in (4): $m_2 \frac{R_2}{R_1} \ddot{z}_1 - m_2 g + \frac{R_1}{R_2} (m_1 \ddot{z}_1 + m_1 g) = 0$
[eliminiere $\ddot{z}_2$]

$$\rightarrow \ddot{z}_1 = R_1 \frac{m_2 R_2 - m_1 R_1}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g \quad (6)$$

$$(2) \& (6) \rightarrow \ddot{z}_2 = R_2 \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g \quad (7)$$

(i) $\ddot{z}_i = 0 \rightarrow m_1 R_1 = m_2 R_2 \dots$ „Hebelgleichgewicht“

(ii) $\ddot{z}_i \neq 0 \rightarrow$ gleichmäßige Beschleunigung

- Zwangskräfte:

$$(12.21): F_1^{(z)} = \lambda_1 \phi_1^{(1)} = \frac{\lambda_1}{R_1} \stackrel{(5)}{=} m_1 \ddot{z}_1 + m_1 g$$

$$\stackrel{(6)}{\Rightarrow} F_1^{(z)} = m_1 g \frac{m_2 R_2 (R_1 + R_2)}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \quad (8)$$

$$F_2^{(z)} = \lambda_1 \phi_2^{(1)} = \frac{\lambda_1}{R_2} = m_2 g \frac{m_1 R_1 (R_1 + R_2)}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$$

$$(i) \ddot{z}_i = 0 \rightarrow m_1 R_1 = m_2 R_2 \rightarrow F_1^{(z)} = m_1 g \quad \checkmark$$

$$F_2^{(z)} = m_2 g \quad \checkmark$$

Zwangskräfte bringen Gewichtskräfte auf

$$(ii) \ddot{z}_i \neq 0: F_i^{(z)} \neq m_i g$$

Zwangskräfte auch bei Beschleunigung beteiligt

- Test:

$$0 \stackrel{?}{=} F_1^{(z)} \delta z_1 + F_2^{(z)} \delta z_2 = (F_1^{(z)} R_1 - F_2^{(z)} R_2) \delta \varphi_1 \stackrel{(8)}{=} 0!$$

$\rightarrow$ virtuelle Arbeit der Zwangskräfte ist Null (hier)