

8. Bemerkungen zu Differentialgleichungen (DGL)

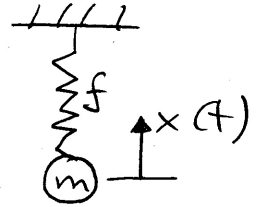
- Auswahl von DGL

8.1. Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

- Motivation:

harmonischer Oszillator ohne Reibung:

$$\text{Bew. gl.: } \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{f}{m} \quad (8.1)$$



Lösung: (rechne nach!)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \\ &= c \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (8.2)$$

mit $c_1 = c \cos \alpha$, $c_2 = c \sin \alpha$

- allgemein:

inhomogene DGL: Funktion $x(t)$, $D^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}$ muß nicht Zeit sein

$$\begin{aligned} [D^{(n)} + a_{n-1} D^{(n-1)} + a_{n-2} D^{(n-2)} + \dots + a_1 D + a_0] x(t) &= f(t) \\ \iff \mathcal{D} x(t) &= f(t) \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Differentialoperator!

- Gehe ins Komplexe: [leichter zu lösen]

$$\left. \begin{aligned} x(t) = \operatorname{Re} z(t) &\longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \\ f(t) = \operatorname{Re} h(t) &\longrightarrow h(t) = f(t) + ig(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

$$\text{Löse also: } \mathcal{D} z(t) = h(t) \quad (8.5)$$

$$\longrightarrow \text{reelle Lsg.: } x(t) = \operatorname{Re} z(t)$$

[Real- und Imaginärteil
müssen nicht !]

• homogene DGL: $\mathcal{D} z(t) = 0$

Lösungsansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$

(mit $\mathcal{D}^{(k)} z(t) \sim \lambda^k \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}$ in $\mathcal{D} z(t) = 0$)

$$\rightarrow \boxed{P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0} \quad (8.6)$$

... charakteristisches Polynom

Fundamentalsatz der Algebra (o.B.):

$$\boxed{P(\lambda) = 0 \text{ besitzt genau } n \text{ Lösungen } \lambda_k \in \mathbb{C}, k=0, \dots, n-1} \quad (8.7)$$

$\rightarrow$ allgemeinste homogene Lsg. von (8.5) [$h(t)=0$]

$$\boxed{z_{\text{hom}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\lambda_k t}} \quad (8.8)$$

... beliebige Superposition der Einzellösungen

NB: bei Entartung (o.B.): $\lambda_k = \lambda_l: e^{\lambda_k t}, (1 + \underbrace{c}_{\uparrow \text{ zu bestimmen}} t) e^{\lambda_k t}$

• inhomogene DGL: $\mathcal{D} z(t) = h(t)$

allg. Lsg. (o.B.): $\boxed{z(t) = z_{\text{hom}}(t) + z_{\text{part}}(t)} \quad (8.9)$

s. Gl. (8.8) eine „partikuläre“ Lsg.

Bem: $z_{\text{hom}}(t)$ generiert die gesamte Lösungsschar aus $z_{\text{part}}(t)$

• Bestimme c_k aus Rand-/Anfangsbedingungen:

Bsp: $n=2$ (t...zeit) $x(0) = x_0, \underbrace{D^{(1)} x(t)}_{\text{Geschw.}} \Big|_{t=0} = x_1$

$\rightarrow$ 2 Gl. für 2 Unbekannte $c_0, c_1!$

8.2 DGL mit getrennten Variablen

- allgemein: für $y(x)$, $' = \frac{d}{dx}$

$$\boxed{g(y) y' = f(x), g(y) \neq 0} \quad (8.10)$$

Lsg:

Wdh-
integriere

$$g(y) dy = f(x) dx$$

... "Trennung der Variablen" / Konstante

$$\boxed{\begin{aligned} \int g(y) dy &= \int f(x) dx + C \\ G(y) &= F(x) + C \end{aligned}} \quad (8.11)$$

... Integration (8.10)

= implizite Gl. für $y(x)$

- Beispiele:

(i) homogene lineare DGL:

$$\boxed{y' = f(x)y} \quad (8.12)$$

$$\text{Lsg: } \int \frac{dy}{y} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\rightarrow \ln y = F(x) + C_1 \quad | e^{\dots}$$

$$\rightarrow \boxed{y(x) = C e^{F(x)}} \quad (8.13)$$

(ii) inhomogene lineare DGL:

$$\boxed{y' = f(x)y + g(x)} \quad (8.14)$$

$$\text{allgemeine Lsg.: } \boxed{y(x) = \underbrace{y_{\text{hom}}(x)}_{\text{s. Gl. (8.13)}} + y_{\text{part}}(x)}$$

Bestimme $y_{\text{part}}(x)$:

(1) Raten!! [absolut legitim]

(2) "Variation der Konstanten" in y_{hom} Gl. (8.13)

$$\text{Ansatz: } y_{\text{part}} = \tilde{C}(x) e^{F(x)} \quad \text{in (8.14)}$$

mit $y'_{\text{part}} = \tilde{C}'(x) e^{F(x)} + \tilde{C}(x) f(x) e^{F(x)}$
in (8.14)

$$\rightarrow \tilde{C}'(x) e^{F(x)} = g(x)$$

$$\rightarrow \tilde{C}'(x) = g(x) e^{-F(x)}$$

$$\rightarrow d\tilde{C} = g(x) e^{-F(x)} dx$$

$$\boxed{\tilde{C} = \int g(x) e^{-F(x)} dx + C_0}$$

$$\rightarrow y_{\text{part}} = \tilde{C}(x) e^{F(x)} !$$