

Prof. Dr. Holger Stark, Josua Grawitter, Maximilian Seyrich
Lasse Ermoneit, Philip Knospe, Isaak Mengesha und Philipp Stammer

10. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Termine: **S** Abgabe bis Donnerstag, 09.01.2020, 12 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang
M Vorrechnen in den Tutorien Dienstag, 07.01. – Montag, 13.01.2020

Bitte die Matrikelnummern und mind. ein Tutor auf dem Aufgabenzettel angeben.

S **Aufgabe 30 (20 Punkte):** *Geigensaite (schriftlich, 3+3+2+2+4+3+3)*

Die Auslenkung einer Saite wird beschrieben durch die Wellengleichung:

$$(30.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad w = w(x, t).$$

I. Sinusförmige Auslenkung

Lösung nach D'Alembert

- (a) Zeigen Sie, dass man durch die Transformation $z_1 = x - ct$, $z_2 = x + ct$ aus Gleichung (30.1) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} = 0,$$

erhält.

- (b) Leiten Sie mit Hilfe dieser Gleichung die allgemeine Lösung

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left(w(x + ct, 0) + w(x - ct, 0) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{w}(\tilde{x}, 0) d\tilde{x} \right)$$

in Abhängigkeit einer gegebenen Anfangsauslenkung $w(x, 0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{w}(x, 0)$ her. (Für den Beweis durch Einsetzen in die oberen Gleichungen gibt es *keine Punkte*.) *Hinweis:* Schreiben Sie ihren Lösungsansatz geschickt in zwei Summanden und nutzen Sie die Definitionen von z_1 und z_2 aus (a).

- (c) Bestimmen Sie nun $w(x, t)$ für eine an den Rändern fest eingespannte Saite ($w(0, t) = w(l, t) = 0$) der Länge l mit Anfangsbedingungen $w(x, 0) = w_0 \sin(\pi x/l)$ und $\dot{w}(x, 0) = 0$. Interpretieren Sie die Lösung.

Lösung nach Fourier/Bernoulli

- (d) Separieren Sie Gleichung (30.1) in einen Orts- und einen Zeitanteil mit Hilfe des Ansatzes $w(x, t) = X(x)T(t)$ und leiten Sie die allgemeine Lösung

$$w(x, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \cdot \left[C \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + D \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \right]$$

her. (Auch hier gibt es *keine Punkte* für den Beweis durch Einsetzen in die oberen Gleichungen.)

- (e) Verwenden Sie die Anfangs- und Randbedingungen aus (c) um $w(x, t)$ zu bestimmen. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (c).

Bitte Rückseite beachten! →

II. Rechteckförmige Auslenkung

Betrachten Sie nun eine Saite mit den gleichen Randbedingungen wie in (c) und den Anfangsbedingungen

$$w(x, 0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } l/4 \leq x \leq 3/4l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \dot{w}(x, 0) = 0.$$

Lösung nach D'Alembert

- (f) Bestimmen Sie $w(x, t)$ mit Hilfe von (b) und skizzieren Sie $w(x, t)$ für verschiedene Zeiten zwischen $t = 0$ und $t = l/c$.

Hinweis: Setzen Sie die Lösung $w(x, t)$ an den Rändern geeignet fort um die Randbedingungen stets zu erfüllen. Das heißt, Sie stellen sich vor, die Saite wird über die Ränder hinaus fortgesetzt und auf den zusätzlichen (virtuellen) Stücken befinden sich ebenfalls Schwingungen. Nutzen Sie dann das Prinzip der Superposition an den Rändern.

Lösung nach Fourier/Bernoulli

- (g) Bestimmen Sie $w(x, t)$ mit Hilfe von (d).

Hinweis: Berechnen Sie das Integral $\int_0^l w(x, 0) \sin(n\pi x/l) dx$ zur Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Lösung. Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{nm}$$

für $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

M Aufgabe 31 (4 Punkte): Klassifizierung von Zwangsbedingungen

Skizzieren Sie die folgenden Systeme und klassifizieren Sie sie jeweils nach den Attributen: skleronom oder rheonom, holonom oder nichtholonom, konservativ oder nichtkonservativ.

- (a) Eine Kugel, die auf einer festen Kugel reibungsfrei hinunterrollt.
- (b) Ein Zylinder, der eine rauhe, schiefe Ebene (Neigungswinkel α) herabrollt.
- (c) Ein Teilchen, das auf der rauhen Fläche eines Rotationsparaboloides hinuntergleitet.
- (d) Ein Teilchen, das sich längs eines sehr langen Stabes reibungslos bewegt. Der Stab rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einer vertikalen Ebene um eine horizontale Achse.

Vorlesung:

- Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201
- Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <https://www.tu-berlin.de/?208078>

Bemerkung: Die Übungsaufgaben werden nur als dokumentenechte, handschriftliche, gut lesbare Originale akzeptiert. Wir akzeptieren weder Kopien noch elektronische Abgaben. Aufgaben bitte in Gruppen von drei Personen einreichen.