Prof. Dr. Holger Stark, Josua Grawitter, Maximilian Seyrich
Lasse Ermoneit, Philip Knospe, Isaak Mengesha und Philipp Stammer

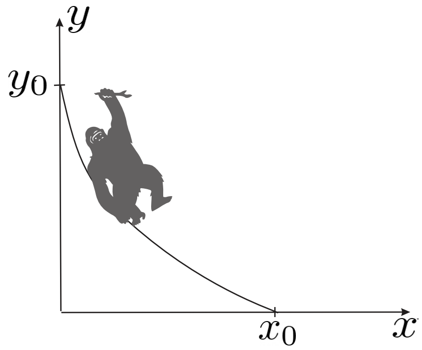
12. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Termine: **S Abgabe bis Donnerstag, 23.01.2020, 12 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang**
M Vorrechnen in den Tutorien Dienstag, 21.01. – Montag, 27.01.2020

Bitte die Matrikelnummern **und mind. ein Tutor** *auf dem Aufgabenzettel angeben.*

S Aufgabe 35 (14 Punkte): *Brachistochronenproblem* (4+6+3+1)

An Bord eines Flugzeuges ist nach der Landung ein Feuer ausgebrochen. Die Passagiere müssen über eine Notrutsche aussteigen, auf der sie reibungsfrei herabgleiten. Hierbei müssen sie den Höhenunterschied y_0 bewältigen und einen Sicherheitsabstand zum Flugzeug x_0 erreichen. Bestimmen Sie die optimale Form (Bahn) der Rutsche $y(x)$, mit der die Passagiere das Flugzeug auf dem schnellsten Wege verlassen können.



(a) Zeigen Sie, dass die "Rutschzeit" entlang der Bahn $y(x)$ durch das Funktional $T[y]$ mit

$$T[y] = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g\{y_0 - y(x)\}}}dx$$

gegeben ist, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Folgern Sie dies aus dem Energieerhaltungssatz.

(b) Zeigen Sie, dass die Extremalbedingung $\frac{\delta T[y]}{\delta y(x)} = 0$, wobei $\frac{\delta T[y]}{\delta y(x)}$ die Funktionalableitung ist, zu folgender Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2g(y_0 - y(x))(1 + (y'(x))^2)}\right] = 0$$

äquivalent ist.

(c) Integrieren Sie die Differentialgleichung einmal und zeigen Sie, dass eine parametrische Darstellung der Lösung durch

$$x = x(s) = \frac{c^2}{4g}(s - \sin(s)) \qquad \text{und} \qquad y = y(s) = y_0 - \frac{c^2}{4g}(1 - \cos(s))$$

gegeben ist. Hierbei ist c^2 die Integrationskonstante aus (b).

(d) Stellen Sie die Lösung für $y_0 = 1$ und verschiedene c graphisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis. Sie können hierfür auch ein geeignetes Programm wie *gnuplot* oder *mathematica* verwenden.

Bitte Rückseite beachten!⟶

S **Aufgabe 36 (6 Punkte):** *Zentralpotentiale und Lagrange-Formalismus* (**3+3**)

Das Potential des Keplerproblems ist durch $V = -\frac{GmM}{r}$ gegeben, wobei $r = |\mathbf{r}|$. Im Gegensatz dazu ist das Potential des dreidimensionalen harmonischen Oszillators durch $V = \frac{1}{2}m\omega r^2$ gegeben.

(a) Berechnen Sie analog zur Vorlesung ausgehend von $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten (r, φ, θ). Geben Sie dann die Lagrangefunktion für jeweils beide Potentiale an.

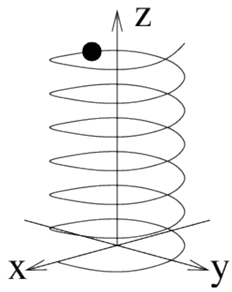
(b) Leiten Sie aus der Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten (r, φ, θ) für beide Potentiale her.

M **Aufgabe 37 (4 Punkte)**: *Perle auf einer Helixbahn (Lagrange II)* **(1+2+1)**

Eine Perle der Masse m gleite unter Einwirkung der Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ reibungsfrei auf einer Schraubenlinie

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi(t) \\ R\sin\varphi(t) \\ \frac{b}{2\pi}\varphi(t) \end{pmatrix}$$

mit konstanter Ganghöhe $b > 0$, konstantem Radius $R > 0$ und Polarwinkel $\varphi(t)$ (siehe Skizze).



(a) Rekapitulieren Sie die Zwangsbedingungen $\Phi^{(\nu)}(\boldsymbol{r})$ aus Aufgabe 33 von Übungsblatt 11. Wählen Sie passende generalisierte Koordinaten q_k und formulieren Sie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\{q_k\}, t)$.

(b) Argumentieren Sie, warum es genügt die Lagrange Funktion $L = T - U$ zu bestimmen und formulieren Sie die Lagrangesche Gleichung 2. Art.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für eine beliebige Anfangsbedingung.