Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 11. November 2019
https://www.tu-berlin.de/?208078

Prof. Dr. Holger Stark, Josua Grawitter, Maximilian Seyrich
Lasse Ermoneit, Philip Knospe, Isaak Mengesha und Philipp Stammer

5. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Termine: S Abgabe bis Donnerstag, 21.11.2019, 12 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang
M Vorrechnen in den Tutorien Dienstag, 19.11. – Montag, 25.11.2019

Bitte die Matrikelnummern **und mind. ein Tutor** *auf dem Aufgabenzettel angeben.*

S Aufgabe 13 (12 Punkte): *Fouriertransformation und* δ*-Funktion* **(schriftlich 1+1+2+2+3+2+1)**

Die Definition der Fourier-Transformation (FT) ist gegeben durch:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Man kann dann zeigen, dass sich $f(t)$ über

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{14.1}$$

darstellen lässt. Das verallgemeinerte Skalarprodukt zweier komplexer Funktionen $f(t)$, $g(t)$ ist durch $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)\mathrm{d}t$ gegeben, wobei $*$ fuer das komplex konjugierte von $f(t)$ steht.

(a) Zeigen Sie, dass für reelle $f(t)$ gelten muss: $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$.

(b) Beweisen Sie, dass Ableitungen bei FT in Multiplikation mit ω übergehen:

$$\widehat{\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)} = i\omega\hat{f}(\omega)$$

Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass $f(t) \to 0$ für $|t| \to \infty$.

(c) Berechnen Sie die FT $\hat{\delta}_\varepsilon(\omega)$ für die Rechteckfunktion

$$\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |t| \le \varepsilon/2, \\ 0 & \text{für } |t| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

Diskutieren Sie Ihr Resultat für variierendes ε. Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle $\varepsilon \to 0$ und $\varepsilon \to \infty$.
Bonus (**+2 Punkte**): Berechnen Sie mit Hilfe von Gl. (14.1) $\delta_\varepsilon(t)$.

(d) Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$. Berechnen Sie die FT $\hat{\delta}(\omega)$. Welche Fourierdarstellung ergibt sich damit für $\delta(t)$?

(e) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte eines Gaußpaketes der Breite σ: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Welche Breite besitzt die Fouriertransformierte?
Hinweis: Benutzen Sie hierzu, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\alpha(x+i\beta)^2] = \sqrt{\pi/\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, welches sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten läßt.

(f) Als *Faltung* $f * g$ zweier Funktionen wird das Integral $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass bei einer FT die Faltung in eine Multiplikation übergeht: $\widehat{(f*g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

S Aufgabe 14 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft* **(schriftlich 2+4+2)**

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft $F(t)$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t).$$

(a) Bestimmen Sie analog zur Vorlesung die kausale Greensche Funktion.

(b) Lösen Sie mit Hilfe der Greenschen Funktion die DGL für

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > t_0 \\ k/t_0 & \text{für } 0 < t < t_0 \end{cases} \quad \text{mit } t_0 \ll 2\pi/\omega_0 \text{ und } k = const.$$

(c) Vergleichen Sie Ihre Lösung für $t_0 \longrightarrow 0$ mit der allgemeinen Lösung des harmonischen Oszillators ohne äußere Kräfte.

M Aufgabe 15 (4 Punkte): δ-*Distribution* **(mündlich 1+1+1+1)**

Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) .$$

(a) Zeigen Sie, dass durch folgende Funktionenschar (*Lorenz-Kurve*) im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die „δ-Funktion" gegeben ist:

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} .$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y = x/\epsilon$. Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

Zeigen Sie:

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = -\int_0^{\infty} f'(x) dx$.
Hinweis: f ist differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null.

(c) $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$.

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0} \delta(x_0 - x) \right) f(x) \mathrm{d}x = f'(x_0)$.