Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Malte Selig, Arne Zantop

1. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 31.10.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (9 Punkte): *Wiederholung Relativistik und Klein-Gordon-Gleichung*
Verwenden Sie für diese Aufgabe die Einstein'sche Summenkonvention.

1. Aus welchen Komponenten besteht ein Vierervektor?
2. Geben Sie die Form eines kontravarianten Vektors an.
3. Wie ist der kovariante Vektor unter Verwendung des metrischen Tensors definiert? Was ist der metrische Tensor?
4. Die Minkowski-Norm ist über $s^2 = c^2t^2 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$ definiert. Schreiben Sie die Minkowski-Norm und -Skalarprodukt a) unter zu Hilfenahme des metrischen Tensors und b) nur unter Verwendung der ko- und kontravarianten Vektorindices.
5. Die Lorentztransformation Ω transformiert einen kontravarianten Vektor als $x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu$. Wie transformiert sich dann ein kovarianter Vektor $x'_\mu = w^\nu_\mu x_\nu$? Also wie hängt w^ν_μ mit Ω^μ_ν zusammen?
6. Folgern Sie aus der Invarianz des Minkowski-Produktes gegenüber Lorentz-Transformationen, was $\Omega^\rho_\mu w^\nu_\rho$ ergibt.
7. Wie transformieren sich kontravariante Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\beta}$? Umkehrt, wie transformieren sich kovariante Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_\beta}$?
8. Schreiben Sie die Klein-Gordongleichung
$$\left(\Box + \frac{1}{\lambdabar^2}\right)\psi(\underline{x}) = 0$$
(wobei $\lambdabar = \hbar/(m_0c)$ die reduzierte Compton-Wellenlänge bezeichnet) mit Hilfe der kontra- und kovarianten Ableitungen $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ und $\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.
9. Zeigen Sie mit dem in den anderen Aufgabenteilen wiederholtem Wissen, das die Klein-Gordongleichungen forminvariant sind. Geben Sie auch die Transformation der Wellenfunktion $\psi(x^\mu) \to \psi'(x'^\mu) = S(\Omega)\psi(x)$ an, wobei $S(\Omega)$ eine lineare Darstellung der Lorentzgruppe ist. Tipp: Berücksichtigen Sie, dass sowohl die Identität wie die Punktspiegelung Elemente der Lorentzgruppe sind. Welche Verhalten bei Punktspiegelung sind möglich?

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Relativistische Formulierung der Elektrodynamik*
Zur relativistischen Formulierung der Elektrodynamik wird der Viererstrom $j^\mu = (c\,\rho, \mathbf{j})$ und das Viererpotential $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ (in Gaußschen Einheiten) verwendet.

(a) Formulieren Sie die Lorenz-Eichung und die Potentialgleichungen in Lorenz-Eichung in der Viererschreibweise.

(b) Der elektromagnetische Feldtensor ist gegeben durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Wie lauten die einzelnen Komponenten des Feldtensors ausgedrückt durch das elektrische und das magnetische Feld?

(c) Zeigen Sie, dass $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ gilt und dass sich hieraus die inhomogenenen Maxwell-Gleichungen ableiten lassen.

(d) Zeigen Sie, dass $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$ gilt und dass sich hieraus die homogenen Maxwell-Gleichungen ableiten lassen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Kontinuitätsgleichung und Klein-Gordon-Gleichung*
Die Klein-Gordon-Gleichung (s. Aufg. 1) für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld ergibt sich in minimaler Kopplung durch die Ersetzungen $\partial^\mu \to \partial^\mu + i\frac{q}{c\hbar} A^\mu$ und $\partial_\mu \to \partial_\mu + i\frac{q}{c\hbar} A_\mu$.

(a) Zeigen Sie, dass der Viererstrom $j^\mu = i\frac{\hbar}{2m_0}(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) - \frac{q}{cm_0} A^\mu \psi \psi^*$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt, wenn ψ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass ein freies Teilchen in einer Dimension mit $\psi(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar}$ die Klein-Gordon-Gleichung für $A^\mu = 0$ erfüllt. Berechnen Sie $E(p)$ und ρ. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Vorlesung: Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203,
Do. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und **aktive** Teilnahme in den Übungen.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene (Springer)
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie (Aula-Verlag)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7: Vielteilchentheorie (Springer)