Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Malte Selig, Arne Zantop

11. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 23.01.2020 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 20 (10 Punkte): *Bogoliubov Transformation des BCS Hamilton-Operators*

Der Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow}, \quad \xi_{-\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} \quad V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = V^*_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

Hierbei bezeichnen die $\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}$ fermionische Operatoren mit Wellenzahl $\mathbf{k}$ und Spin σ.

(a) Zeigen Sie, dass der mit Hilfe eines mean-field Ansatzes genäherte H_{BCS} gegeben ist durch

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\Delta_{\mathrm{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} + \Delta^*_{\mathrm{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}) + E^{(0)},$$

wobei $E^{(0)}$ ein Term ist, der von keinem Operator abhängt, und $\Delta_{\mathrm{k}} = -\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle$.

(b) Verwenden Sie nun die Bogoliubov Transformation

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u^*_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v^*_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}}_{\hat{U}_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix},$$

um den mean-field BCS Hamiltonian zu diagonalisieren. Bestimmen Sie dabei auch $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$. Für die Operatoren $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}$ gelten die kanonischen Antikommutatorrelationen, also $[\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}$ und $[\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ = [\hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ = 0$. Zeigen Sie zunächst mithilfe der Antikommutatorrelationen, dass $\hat{U}_{\mathbf{k}}$ unitär ist.

Bitte Rückseite beachten!⟶

11. Übung QM2 WS19/20

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Green'sche Funktionen im Tight-Binding-Modell (TBM)*
In dieser Aufgabe soll die Green'sche Funktion für den Tight-Binding-Hamiltonoperator (TBH) betrachtet werden. Der TBH ist ein Beispiel für einen periodischen Hamiltonoperator. TBH bleiben invariant unter Translationen mit einem Vektor **l**, wobei die Menge {**l**} ein reguläres Gitter im d-dimensionalen Raum bildet. Der Hamiltonian des TBM ist gegeben durch

$$\hat{H} = \epsilon_0 \sum_{l} |l\rangle\langle l| + V \sum_{\langle lm \rangle} |l\rangle\langle m|,$$

mit den Annahmen: (i) Nächste-Nachbar-Kopplung im zweiten Term ($\langle\rangle$ markiert dies in den Summen), (ii) $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$.
Die Green'sche Funktion des TBH ist definiert durch

$$\hat{G}(z) = \sum_{k} \frac{|k\rangle\langle k|}{z - E(\mathbf{k})}, \quad G(l,\, m;\, z) = \langle l|\hat{G}(z)|m\rangle$$

(a) Verifizieren Sie, dass die Eigenfunktionen und die Eigenenergien des TBH durch

$$|k\rangle = \sum_{l} c_l |l\rangle = c_0 \sum_{l} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} |l\rangle, \quad E(\mathbf{k}) = \epsilon_0 + V \sum_{\langle l \rangle} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}$$

gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, dass für die diagonalen Matrixelemente der Green'schen Funktion des TBH $G(l,\, l;\, z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \frac{1}{z}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie für ein 1D-Gitter die Green'sche Funktion $G^{+}(l,\, m;\, z)$ (lösen Sie insbesondere die auftretenden Integrale) und zeigen Sie, dass die Zustandsdichte pro Gitterpunkt gegeben ist durch

$$\rho(E) = \frac{\theta\left(B - |E - \epsilon_0|\right)}{\pi\sqrt{B^2 - (E - \epsilon_0)^2}},$$

wobei $B = 2|V|$. Tipp: Die Substitution $\phi = ka$ mit der Gitterkonstante a und das Lösen in der komplexen Ebene mit $w = e^{\imath\phi}$ mittels Residuenkalküls kann hilfreich sein.