Prof. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Dr. Malte Selig, Arne Zantop

12. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 30.01.2020 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 22 (7 Punkte): *Zweite Ordnung Born und Yukawa-Potential*
Wir betrachten die Streuung einer einfallenden ebenen Welle $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ an einem Potential $V(\mathbf{r})$. Die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung kann formal als

$$\psi^{\pm}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \,\langle \mathbf{r}|\hat{G}^{\pm}_0(E)|\mathbf{r}'\rangle V(\mathbf{r}')\, \psi^{\pm}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$$

geschrieben werden, mit der Green'schen Funktion in 3D: $\langle \mathbf{r}|\hat{G}^{\pm}_0(E)|\mathbf{r}'\rangle = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

(a) Lösen Sie diese Integralgleichung formal bis einschließlich zweiter Ordnung im Potential unter Verwendung der Born'schen Näherung. Gehen Sie davon aus, dass $r \gg r'$ ist und bringen Sie Ihr Ergebnis in die Form $\psi^{+}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k})\frac{e^{ikr}}{r}$ mit

$$\begin{aligned} f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k}) = &-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \\ &-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}' e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_\mathbf{r}} \cdot V(\mathbf{r}') \cdot \int d\mathbf{r}''\langle \mathbf{r}'|\hat{G}^{\pm}_0(E)|\mathbf{r}''\rangle V(\mathbf{r}'') \cdot \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'') \\ &+ \mathcal{O}(V^3)\,, \end{aligned}$$

mit $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e}_r$.

(b) Berechnen Sie für das Yukawa-Potential $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r}\cdot e^{-r/R_0}$ die erste Ordnung von $f^{+}(k\,\mathbf{e}_r, \mathbf{k})$. Zeigen Sie, dass sich daraus für $R_0 \to \infty$ die Rutherfordsche Streuformel $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2\alpha^2}{4k^4\hbar^4}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ ergibt. *Hinweis:* Definieren Sie dazu $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e}_\mathbf{r}$ und erläutern Sie mithilfe einer Skizze die Gültigkeit von $q = 2k\sin(\theta/2)$, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$ ist.

Aufgabe 23 (3 Punkte): *Streuung am Delta-Potential*

Berechnen Sie mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung in einer Raumdimension die Streuung einer ebenen Welle an dem singulären Potential $V(x) = g\,\delta(x)$.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes*

In der vorliegenden Aufgabe soll die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes berechnet werden. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

1. Beginnen Sie mit der Lagrangedichte für den Vakuumfall (keine Ströme, keine Ladungen) in der 4er-Schreibweise $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Der Feldtensor des elektromagnetischen Feldes ist wie folgt definiert:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c_0} & \frac{E_y}{c_0} & \frac{E_z}{c_0} \\ -\frac{E_x}{c_0} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c_0} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c_0} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte explizit folgende Form annimmt: $\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\mathbf{E}^2 - c_0^2\mathbf{B}^2\right)$. Verwenden Sie hierfür die Minkowski-Metrik: $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{Diag}(1, -1, -1, -1)$.

2. Um die Euler-Lagrange-Gleichung anzuwenden, drücken Sie die Lagrangedichte mit Hilfe des Vektorpotentials aus: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, wobei $A_\mu = (\phi/c_0, -A_x, -A_y, -A_z)$ und $\partial_\mu = (\partial_t/c_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} - \frac{\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0,$$

   um die inhomogenen Maxwellgleichungen zu bestätigen: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{B} = c_0^{-2}\partial_t \mathbf{E}$.

3. Leiten Sie nun explizit die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes mittels der Legendretransformation her:

$$H = \int d^3r \left(\Pi^\mu(\partial_0 A_\mu) - \mathcal{L}\right) = \int d^3r \frac{\epsilon_0}{2}\left(\mathbf{E}^2 + c_0^2\mathbf{B}^2\right), \qquad \Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}.$$