Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Dr. Schellstede

Bonusblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 22. Februar 2021 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 08. Februar 2021

Geodäten im sphärisch symmetrischen Schwerefeld (15 Punkte)

Teilchen die nur der Gravitation unterliegen sowie Lichtstrahlen bewegen sich auf Geodäten der Raum-Zeit. Berechnen Sie daher die konkrete Form der Geodäten für den Fall des zentralsymmetrischen Schwerefelds.

Dazu wird vom in Übung 9 ermittelten Schwarzschildschen Linienelement ausgegangen:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}} \mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1}$$

Begründen Sie zunächst warum es dabei ausreichend ist, die Geodäten in der Hyperfläche $\theta = \pi/2 = \text{const.}$ zu betrachten.

Legen Sie dann für Ihre weiteren Überlegungen die um θ „reduzierte" Schwarzschildmetrik zugrunde:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\phi^2 \,. \tag{2}$$

Berechnen Sie damit jetzt die konkrete Form der Geodäten in dieser Hyperebene, indem Sie die Geodätengleichung konkret auswerten:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^a}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}s} \,. \tag{3}$$

Dabei werden Sie feststellen, dass die θ-Komponente zum Ausdruck $0 = 0$ führt. Wie sehen die Gleichungen für die anderen Komponenten aus?

Integrieren Sie die Gleichungen für die Komponenten ct und ϕ. Dies führt auf folgende Gleichungen, wo a und b Integrationskonstanten sind.

$$\left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right) \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}s} = a \quad \text{sowie} \quad r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = b \,. \tag{4}$$

Zudem kann genutzt werden, dass der Tangentialvektor entlang der Geodätischen parallel transportiert wird, weshalb seine Länge konstant ist. Die konstante Länge (C) kann geschrieben werden als:

$$-\left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right) \left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = C \,. \tag{5}$$

Nutzen Sie im weiteren diese Gleichung anstelle der Geodätengleichung für die Komponente r, die sich als Folge herausstellt.

Aufgabe ist es nun ct und s zu eliminieren und eine DGL zwischen r und ϕ zu ermitteln! Ersetzen Sie dazu in (5) die entsprechenden Variablen durch (4). Ihr Ergebnis sollte zum Schluss folgende Form besitzen:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = A + \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right)\left(B - \frac{1}{r^2}\right) \quad \text{mit} \quad A := \frac{a^2}{b^2} \geqq 0 \quad \text{sowie} \quad B := \frac{C}{b^2} \leqq 0\,. \tag{6}$$

Warum ist $C < 0$ für Teilchen und $C = 0$ für Licht zu setzen?

Es ist jetzt noch möglich die neue Variable $\sigma := 1/r$ einzuführen. Jetzt kann die DGL (6) noch auf eine DGL 2. Ordnung für σ gebracht werden. Zeigen Sie das folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\phi^2} = -\frac{\gamma\, m_{\text{Stern}} B}{c^2} - \sigma + \frac{3\gamma\, m_{\text{Stern}}}{c^2}\,\sigma^2\,. \tag{7}$$

Das Auffinden der Geodäten ist damit auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt.

Lösen Sie die Gleichung für $C < 0$ näherungsweise, indem Sie zunächst folgende Gleichung integrieren:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_0}{\mathrm{d}\phi^2} = -\frac{\gamma\, m_{\text{Stern}} B}{c^2} - \sigma_0\,. \tag{8}$$

Lösen Sie jetzt näherungsweise die Ausgangsgleichung (7) indem Sie dort $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ setzen und $(\sigma_0 + \sigma_1)^2 \approx \sigma_0^2$ annehmen und erläutern Sie den daraus hervorgehenden ‚post-Newtonschen' Effekt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de