Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. v. Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Dr. Schellstede

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 07. Dezember 2020 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 23. November 2020

Insgesamt 10 Punkte

Aufgabe zum kanonischen Formalismus

Zur Untersuchung der allgemein-relativistischen Lichtausbreitung ist insbesondere das Studium von angepaßten Tetradensystemen von Bedeutung. Aus dem in der Übung angegebenen System läßt sich einfach ein weiteres Tetradensystem mit speziellen Eigenschaften angeben.
a) Zeigen Sie, daß das Tetradensystem:

$$k_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a + u_a) \qquad m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a - u_a) \tag{1}$$

$$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a + iw_a) \qquad \bar{t}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a - iw_a) \tag{2}$$

ein Nullvektoren-Tetradensystem ist, d.h. $k_a k^a = m_a m^a = t_a t^a = 0$ (mit der letzten Gleichung auch $\bar{t}_a \bar{t}^a = 0$) ist.
b) Beweisen Sie die weitere Orthogonalitätseigenschaften und Normierungseigenschaften der einzelnen Tetradenvektoren.
c) Berechnen Sie die Gestalt des metrischen Tensors in diesem Tetradensystem $g^{(r)(s)} = h_a^{(r)} h_b^{(s)} g^{ab}$.
d) Bestimmen Sie die Darstellung des metrischen Tensors $g_{ab} = h_a^{(r)} h_b^{(s)} g_{(r)(s)}$ für das gegebene Tetradensystem.

Linearisierte Feldgleichungen
Der metrische Tensor lässt sich stets in die Minkowskimetrik η und einen Rest h zerlegen:

$$g_{\alpha\lambda} = \eta_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}$$

Zeigen Sie, dass, unter der Annahme $| h_{\alpha\lambda} | \sim | h_{\alpha\lambda,\beta} | \sim | h_{\alpha\lambda,\beta,\gamma} | \ll 1$, die Feldgleichungen in erster Näherung die Gestalt

$$h^{\rho}_{\rho,\mu,\nu} + h^{;\rho}_{\mu\nu,\rho} - h^{\rho}_{\mu\rho,\nu} - h^{\rho}_{\nu,\rho,\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}T\eta_{\alpha\beta})$$

annehmen.
Wie lassen sich auf der linken Seite die Summanden bis auf $h^{;\rho}_{\mu\nu,\rho}$ eliminieren? Zeigen Sie, dass sich eine inhomogene Wellengleichung ableiten lässt.

Falls es Fragen gibt, bin ich per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de